Con precisión, claridad y eficacia, el tratamiento de Gaston CASANOVA sobre las series matemáticas, que presentamos aquí, constituye, no obstante su brevedad, un valioso punto de referencia para los estudiosos de las matemáticas que desean perfeccionar sus conocimientos básicos. Con su maestría divulgadora, denominador común de sus obras, expone y sistematiza conceptos fundamentales de gran importancia para la formación científica en una época de cambio y progreso, lo cual hace de esta obra un instrumento fundamental pedagógico y didáctico.



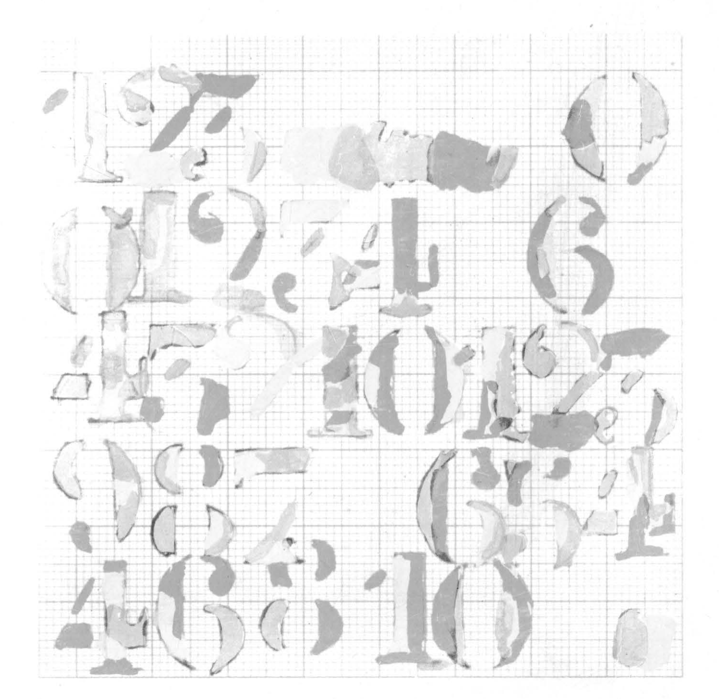
EDICIONES MORATA, S. A.
Mejía Lequerica, 12. Madrid - 4

Las series matemáticas G. Casanova



G. Casanova

Las series matemáticas



EDICIONES
MORATA, S. A.

FILOSOFIA
PSICOLOGIA
PEDAGOGIA

MADRID

LAS SERIES MATEMATICAS

por

GASTON CASANOVA

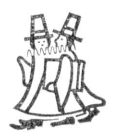
Profesor Agregado de Matemáticas especiales
Doctor en Ciencias de la Universidad de París

OTRAS OBRAS DEL MISMO AUTOR

L'algèbre de Boole (Col. Que sais-je?), París, P. U. F., 3.ª ed., 1972.
Cours de mathématiques spéciales, 4 tomos, París, E. Belin, 1963.
Relativité restreinte, París, E. Belin, 1961.
Invariance et détermination du réel physique, París, E. Belin.

G. CASANOVA

LAS SERIES MATEMATICAS



EDICIONES MORATA, S. A.
Fundación de Javier Morata, Editor, en 1920
MADRID-4

Título original de la obra:
LES SÉRIES MATHÉMATIQUES

*

Versión española de
RAMON IZQUIERDO BAYONA
Licenciado en Ciencias Físicas
Profesor del Colegio Santo Tomás de Aquino, Zaragoza

*

Mejía Lequerica, 12 - Madrid-4

Cubierta de A. CORAZÓN

Depósito legal: M. 38.149.—1975 ISBN: 84-7112-163-8

Printed in Spain by

ARTES GRÁFICAS BENZAL - Virtudes, 7 - MADRID-3

CONTENIDO

Páginas

INTRODUCCION

La historia de las series está ligada estrechamente a la de las matemáticas mismas, siendo difícil abordarla sin citar los más conocidos de sus cultivadores, como J. Gregory, que, sobre la mitad del siglo XVII, calcula π a base del estudio del arco tangente; Mercator, que desarrolla el logaritmo en 1668; Leibnitz, que introduce una condición suficiente de convergencia de las series alternadas, e I. Newton, quien, un poco antes que él, estudia, alrededor de los años 1670, en relación con su creación del cálculo infinitesimal, las series de potencia con miras a resolver problemas considerados hasta entonces imposibles, como el cálculo de los arcos o de los espacios de ciertas curvas, interesándose al mismo tiempo en la construcción de tablas que dan los valores numéricos de las funciones usuales.

En los siglos XVIII y XIX se continúa la obra comenzada, particularmente con B. Taylor, D'Alembert, A.-M. Legendre y L. Lagrange, quien deriva las series de potencias; después, N. Abel, A. Gauss, C. Jacobi. Sobre todo entre los fundadores, estos trabajos deben mucho a la intuición, y los resultados no siempre se encuentran justificados riguro-

samente. Es con A. Cauchy cuando las nociones esenciales de convergencia y de convergencia uniforme serán presentadas de una manera moderna y como la noción de desarrollo en serie se extenderá a los dominios planos y a las variables complejas. Desde entonces, será posible la introducción en matemáticas de nuevas funciones definidas por series, así como el estudio de series de funciones que, por sí mismas, constituyen uno de los capítulos más importantes del Análisis. Citaremos asimismo las series de Bessel, integrales particulares de una ecuación diferencial de segundo orden, que desempeñan en las matemáticas aplicadas a la electrotécnica un papel en extremo importante, ya que sirven, por ejemplo, para calcular la densidad de la corriente en un conductor cilíndrico. Señalemos todavía la introducción por J. Fourier (1768-1830) de las series trigonométricas, que permitieron el desarrollo de ciertas funciones discontinuas y que son de gran utilidad en física teórica, particularmente en mecánica ondulatoria, donde se emplean de modo constante series de funciones ortogonales de las que las series trigonométricas no son más que un caso particular.

La noción de serie reposa, en esencia, sobre la adición y el límite, operaciones que el desarrollo moderno de las matemáticas ha generalizado considerablemente. Es así como las series o las familias sumables pueden ser asociadas a un grupo topológico separado, aditivo y conmutativo de elementos cualesquiera que, a menudo, será un espacio vectorial normado completo; pero estas extensiones no tienen que hacer perder su importancia a las sumas clásicas de infinitos términos, que siguen siendo uno de los útiles más perfeccionados y más eficaces de las matemáticas. Por eso, nosotros comenzaremos por el estudio de las series numéricas, para abordar seguidamente el de las series de funciones antes de considerar las generalizaciones modernas que permiten, por ejemplo, la definición del exponencial de un bivector, asociada estrechamente al grupo de las rotaciones

y donde las aplicaciones son particularmente interesantes en el espacio-tiempo.

Podemos concluir afirmando que el conocimiento de las series, dada la extensión del campo de las aplicaciones, es indispensable hoy a todos aquellos que deseen adquirir una cultura matemática posterior a la formación general.

CAPITULO PRIMERO

LA NOCION DE LIMITE

Los griegos no conocieron las series. Ciertamente, Arquímedes, en sus numerosos trabajos, se aproximó a la integral al considerar sumas infinitas, pero cada uno de los términos de esas sumas tendía hacia cero cuando su número aumentaba indefinidamente, lo cual no se produce en un desarrollo en serie donde cada término de la suma queda bien determinado. Sin embargo, fue un griego, Zenón de Elea, mucho antes de nuestra Era, quien planteó, sin adivinarlo quizá, el problema moderno de límite, enunciando una paradoja célebre que ha conservado su nombre.

I. LA PARADOJA DE ZENON

«Consideramos —dice Zenón— que Aquiles intenta alcanzar en la carrera a una tortuga que tiene sobre él una cierta ventaja. Mientras que él cubre este retraso, la tortuga toma un nuevo avance más pequeño que el primero, pues Aquiles corre con más rapidez que ella, pero no nulo. Cuando Aquiles supera este nuevo retraso, la tortuga toma un nuevo adelanto, y así seguidamente, sin fin, de tal suerte que Aquiles no podrá nunca alcanzar a la tortuga.»

Este razonamiento descansa sobre la divisibilidad al infinito del tiempo y del espacio. Al reflexionar sobre la noción de tiempo, ciertos filósofos, como Aristóteles y H. Bergson, han distinguido su división conceptual al infinito de su división real y, rechazando esta última, pensaron haber refutado así la paradoja. H. Bergson rechaza al mismo tiempo y muy lógicamente el razonamiento matemático que va a seguir, y que acepta la división teórica infinita del tiempo y del espacio.

La noción de tiempo pertenece así a la ciencia con, en particular, el sentido de su medida. No abordaremos aquí la cuestión de saber si es posible medir un intervalo de tiempo tan pequeño como se quiera, aunque la variable temporal es una variable real y puede, por tanto, variar de modo continuo desde un punto de vista teórico.

Zenón ha olvidado únicamente el tener en cuenta una de las condiciones de la carrera, no adicionando al infinito las diferentes duraciones utilizadas por la tortuga en su desplazamiento, olvido tanto más comprensible cuanto que las matemáticas de su tiempo no le permitían efectuar esta operación con seguridad.

Sean dos móviles puntuales A y A_1 que se desplazan sobre el eje $\vec{Ox}$ en el mismo sentido con velocidades respectivas v y v_1, tales *que* $v > v_1$. Nosotros damos $AA_1 = d_0$, $v_1 = kv$, luego $0 < k < 1$ (fig. 1).

y O A A₁ A₂ A₃ Aₙ Aₙ₊₁ B x

Fig. 1

Aquiles, que parte de A recorriendo AA_1 en el tiempo $\frac{d_0}{v}$, y la tortuga, cuando Aquiles ha llegado a A_1, ha llegado a A_2; de tal modo que $A_1A_2 = \frac{v_1}{v} d_0 = k\, d_0$. Por lo mismo, cuando Aquiles ha llegado a A_2 la tortuga ha llegado a A_3 y:

$$A_2A_3 = k\, d_0 \times k = k^2\, d_0,$$

y así sucesivamente; cuando Aquiles llega a A_n, la tortuga llega a A_{n+1} y $A_nA_{n+1} = k^n\, d_0$.

Habrá recorrido entonces la tortuga:

$$k\, d_0 + k^2\, d_0 + \ldots + k^n\, d_0 = k\, d_0 (1 + k + k^2 + \ldots + k^{n-1}).$$

Se sabe que el paréntesis vale:

$$\frac{1 - k^n}{1 - k}$$

y la distancia D_{n+1} recorrida por la tortuga es, pues:

$$D_{n+1} = k\, d_0 \frac{1 - k^n}{1 - k}.$$

Para poder concluir, es necesario saber en qué se convierte k^n cuando n aumenta indefinidamente, es decir, se hace superior a todo entero positivo. Para esto, pongamos $K = \frac{1}{k} = 1 + r$, siendo K superior[1] a 1 y r positivo. Verifiquemos por recurrencia la desigualdad:

[1] $$K^n > 1 + nr.$$

Se verifica:

$$K^2 = (1 + r)^2 = 1 + 2r + r^2 > 1 + 2r.$$

Admitamos:

$$K^n > 1 + nr$$

y multipliquemos por $1 + r$ los dos miembros de esta última desigualdad. Sucede que:

$$K^{n+1} > (1 + nr)(1 + r) = 1 + (n + 1)\, r + nr^2$$

de donde:

$$K^{n+1} > 1 + (n + 1)\, r,$$

lo cual demuestra [1] por recurrencia.

Sea ahora A positivo cualquiera. Tomando:

$$1 + nr > A,$$

luego $n > \frac{A - 1}{r}$, lo que es siempre posible, se muestra que K^n tiende

[1] Superior o inferior son empleados siempre en sentido estricto.

hacia $+\infty$. Como $k^n = \frac{1}{K^n}$ resulta que k^n puede ser hecho inferior a todo ε positivo por una elección conveniente de n y que, en consecuencia, k^n tiende hacia 0, lo cual quiere decir que:

$$\frac{k\,d_0}{1-k} - D_{n+1} = d_0 \frac{k^{n+1}}{1-k}$$

tiende hacia 0.

El razonamiento de Zenón es válido en tanto que la tortuga no alcanza el punto B definido por $\overline{OB} = \frac{k\,d_0}{1-k}$, pero no consideramos lo que hay más allá de este límite que Zenón ha ignorado.

II. LIMITE

El ejemplo precedente muestra la importancia de la noción de límite, pero también la necesidad de dar una definición rigurosa para asegurar la validez de los razonamientos.

Sea una sucesión infinita de números reales, más brevemente, de reales:

[2] $$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

Se dirá que esta sucesión admite un *límite* l (o tiende hacia l) si, para todo ε positivo, existe un entero N tal que para todo $n > \mathrm{N}$:

[3] $$|\,a_n - l\,| < \varepsilon,$$

siendo l un real. Toda sucesión real que admite un límite, necesariamente real, es denominada *convergente* (en el cuerpo de los reales).

Formalizando la escritura se obtendrá:

$$u_n \to l \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \quad \exists\, \mathrm{N} \Longrightarrow \forall\, n > \mathrm{N}, \quad |\,a_n - l\,| < \varepsilon,$$

las dos barras verticales designan el valor absoluto de $a_n - l$.

La desigualdad [3] equivale a:

[4] $$l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$$

que significa que, a partir de un cierto valor N, todos los términos de la sucesión a_n están comprendidos entre $l-\varepsilon$ y $l+\varepsilon$ y son también próximos a l. Resulta intuitivamente de [4] la unicidad del límite. Más precisamente, si $l' \neq l$ es también un límite, $l' - l = l' - a_n + a_n - l$ implica:

[5] $$|\,l' - l\,| \leqslant |\,l' - a_n\,| + |\,a_n - l\,| = |\,l' - a_n\,| + |\,l - a_n\,| < 2\varepsilon$$

que es incompatible con $l \neq l'$, puesto que ε puede ser tan pequeño como se quiera.

Si los a_n, al menos a partir de un cierto valor, son números complejos, la definición precedente es siempre válida; las dos barras verticales significan entonces que se toma el módulo de $l - a_n$, donde l es un número complejo.

Pongamos $a_n = \alpha_n + i\beta_n$, $l = \lambda + i\mu$. Luego:

$$|\,a_n - l\,| = \sqrt{(\alpha_n - \lambda)^2 + (\beta_n - \mu)^2}$$

implica:

[5 *bis*] $$|\,\alpha_n - \lambda\,| < \varepsilon \quad \text{y} \quad |\,\beta_n - \lambda\,| < \varepsilon.$$

Recíprocamente, estas dos condiciones suponen:

$$|\,a_n - l\,| < \varepsilon\sqrt{2}$$

es decir, $l = \lambda + i\mu$ es el límite a_n.

Así, para que una sucesión compleja $a_n = \alpha_n + i\beta_n$ tenga un límite $\lambda + i\mu$ es necesario y suficiente que las dos sucesiones reales α_n y β_n que se pueden extraer tengan ambas límites reales λ y μ. El estudio de las sucesiones complejas queda reducido así al estudio de dos sucesiones reales.

III. CONDICION DE CAUCHY

Cuando la condición [3] es satisfecha, se escribe también:

$$\lim_{n=+\infty} a_n = l.$$

Así, $\lim\limits_{n=+\infty} D_n = \frac{k\,d_0}{1-k}$, y se puede afirmar la convergencia de la sucesión D_n; pero esta condición tiene el inconveniente de exigir el conocimiento preciso del límite, lo cual no está asegurado sino en casos particulares.

Observemos que de [3] se deduce, para todo $m > n$:

[6] $$|a_m - a_n| = |a_m - l + l - a_n| \leqslant |l - a_n| + |l - a_m| \leqslant 2\varepsilon, \quad \forall\, m, n > N.$$

Esta condición [6] es llamada condición de Cauchy, y se advierte que se cumple necesariamente si existe límite. Como el estudio topológico del cuerpo de los reales muestra que es también suficiente, es equivalente a [3] y muy importante desde el punto de vista teórico.

Si a_n es complejo, esta condición es siempre válida, como consecuencia de la reducción de una sucesión compleja a dos sucesiones reales.

IV. SERIES

A toda sucesión de término general u_n asociamos una serie formando las sumas siguientes, denominadas *sumas parciales*.

Decimos:

$$S_1 = u_1$$
$$S_2 = u_1 + u_2$$
$$S_3 = u_1 + u_2 + u_3$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n.$$

Si S_n tiene un límite S para $n \to +\infty$, se dice que la *serie* de término general u_n converge y que tiene por suma S, y se escribe:

[7] $$S = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots,$$

los puntos que siguen a u_n indican que el número de los términos adicionados es infinito.

La diferencia $S - S_n$ es llamada *resto* de la serie. Hay tantos restos como valores de n, pero como $S_n \to S$ y:

[8] $$S = S_n + R_n,$$

resulta de [7] que $\lim\limits_{n=+\infty} R_n = 0$.

Una serie que no es convergente es llamada *divergente*. Para que una serie diverja es necesario y suficiente que S_n no tenga límite cuando n tiende hacia infinito. Estudiar la naturaleza de una serie es decidir sobre su convergencia o su divergencia. Se observa todavía que a toda serie se puede asociar una secuencia poniendo:

$$u_{n+1} = S_{n+1} - S_n$$

La noción de serie, como la de sucesión, es muy general. No hace intervenir otra cosa que la noción de suma y la de límite y puede, por este hecho, ser generalizada a los grupos topológicos separados, aditivos y conmutativos, cualquiera que sea la naturaleza de los elementos. En particular, puede aplicarse a los elementos de un espacio vectorial normado completo; pero nosotros comenzaremos por el estudio de las series numéricas, que es fundamental, para abordar seguidamente las series de funciones y terminar por ejemplos de generalización moderna.

He aquí algunas proposiciones relativas a las series numéricas.

1.ª La condición de Cauchy provee, en principio, una condición necesaria de convergencia. En efecto, la diferencia

$$u_{n+1} = S_{n+1} - S_n$$

podrá ser hecha tan pequeña como se quiera tomando n suficientemente grande, es decir, que:

Si u_n converge, el término general u_n tiende hacia cero cuando n tiende a infinito.

Este teorema es utilizado sobre todo negativamente, es decir, bajo la forma:

Si u_n no tiende hacia cero, la serie u_n diverge. Sea, por ejemplo:

$$u_n = \operatorname{sen} n.$$

Se observa que:

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leqslant n \leqslant \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

implica $\operatorname{sen} n \geqslant \frac{1}{2}$. A todo k, entero, la doble desigualdad precedente hace corresponder un entero n, ya que la diferencia $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi - \left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right)$ es superior a 1. Existen, pues, n tan grandes como se quiera, para los cuales $\operatorname{sen} n$ es superior a $\frac{1}{2}$ y u_n no puede tender hacia cero.

2.ª Otras condiciones necesarias pueden ser deducidas también de la condición de Cauchy, y, en verdad, una infinidad, puesto que m y n pueden tomar en [6] valores cualesquiera desde el instante en que son superiores a N. Reescribamos la condición [6] para una serie:

$$|S_m - S_n| < 2\varepsilon \quad \text{para todos} \quad m, n > N$$

y tomemos $m = 2n$. Se obtiene:

$$|S_{2n} - S_n| < \varepsilon, \quad \forall n > N.$$

La forma negativa del teorema es, aun aquí, muy útil. Sea, por ejemplo, la serie $u_n = \frac{1}{n}$ (serie armónica). Se obtiene:

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

y esta serie diverge, puesto que $S_{2n} - S_n$ no tiende hacia cero.

V. SUMATORIO

Para estudiar la naturaleza de una serie, el procedimiento que parece más natural consiste en calcular S_n y estudiar su límite cuando $n \to +\infty$. Sea S este límite cuando existe. Se escribirá a menudo:

$$S = \sum_{n=1}^{n=+\infty} u_n,$$

la letra griega Σ indica el sumatorio, y los valores de n inferior o superior que le son asociados muestran los valores extremos del índice n del sumatorio. Esta notación no es, en definitiva, más que una abreviación de [7].

1.° Sea $u_n = a^{n-1}$.

Si $a = 1$, $S_n = 1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-1} = n$, y u_n diverge.

Si a, real o complejo, es diferente de 1, $S_n = \frac{1 - a^n}{1 - a}$, y si $|a| < 1$, $|a|^n \to 0$, luego $a^n \to 0$ y $S_n \to S = \frac{1}{1-a}$, si $|a| > 1$, $|a|^n \to +\infty$, luego S_n no tiene límite y u_n diverge.

Queda el caso $|a| = 1$, sea $a = \exp i\theta$ con $\theta \neq$ de $2k\pi$. Se muestra todavía que $\cos n\theta$ y $\operatorname{sen} n\theta$ no tienen límite, de tal suerte que a^n no tiene límite y u_n diverge.

El caso $a = -1$ permite una observación interesante, pues, entonces S_n vale alternativamente 1 y 0 donde la media aritmética es $\frac{1}{2}$, que es, precisamente, el valor de $\frac{1}{1-a}$ para $a = -1$. Esto sugiere una generalización de la noción de convergencia, llamada convergencia en media y que examinaremos posteriormente. En el sentido habitual de la convergencia que ha sido dado, u_n diverge, puesto que S_n no tiene límite.

2.° Si existe una función f tal que:

$$u_n = f(n) - f(n+1)$$

se obtiene $S = f(1) - f(n+1)$ y se puede estudiar el límite.

Así $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ se escribe $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, de donde:

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1} \text{ tiende hacia } 1 = S = \sum_{n=1}^{n=+\infty} u_n.$$

Del mismo modo, si:

$$u_n = \text{Arc tg}\,\frac{1}{n^2+n+1} = \text{Arc tg}\,\frac{1}{n} - \text{Arc tg}\,\frac{1}{n+1}$$

se obtiene $S_n = \dfrac{\pi}{4} - \text{Arc tg}\,\dfrac{1}{n+1}$, que tiende hacia:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

3.° El método precedente puede generalizarse. Supongamos que existe una función f tal que:

$$u_n = Af(n) + Bf(n+1) + Cf(n+2)$$

con $$A + B + C = 0.$$

Se obtiene:

$$u_n = A[f(n) - f(n+1)] + C[f(n+2) - f(n+1)]$$

luego:

$$S_n = C[f(n+2) - f(2)] - A[f(n+1) - f(1)]$$

por tanto, no queda más que estudiar el límite.

Así, sea:

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

Utilicemos la descomposición de fracciones racionales en elementos simples para escribir:

$$u_n = \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)},$$

identidad que puede verificarse directamente. Tenemos:

$$S_n = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n+2} - \frac{1}{2}\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n+1} - 1\right]$$

que tiende hacia $\dfrac{1}{4}$.

El número de casos donde una sumación tan precisa es posible es poco importante. Pero, en la práctica, la suma de toda serie numérica convergente puede ser determinada con toda la aproximación deseable, de tal modo que la naturaleza de las series y las operaciones permitidas sobre las series convergentes son, ante todo, lo interesante.

CAPITULO II

SERIES DE TERMINOS POSITIVOS

Una serie u_n será llamada de términos positivos si, a partir de un cierto valor, es decir, para todo n superior a un N entero fijado, los u_n son todos positivos. Observemos que, si a partir de un cierto valor, todos los u_n son negativos, la serie $- u_n$ es de términos positivos, y si ella converge hacia S, u_n converge hacia $-$ S. Por otra parte, en todas las cuestiones relativas a las series sólo importa el comportamiento de u_n más allá de un cierto valor N cualquiera, pero determinado, en lo que concierne a la naturaleza de la serie: teniendo la suma S_n un valor bien preciso influye evidentemente sobre S, pero no sobre la naturaleza de la serie. Así, el estudio de las series de términos negativos se reduce fácilmente al estudio de series de términos positivos.

La única condición necesaria y suficiente de convergencia de una serie, no haciendo intervenir sino los u_n, es la de Cauchy. Ahora bien, es a menudo la más inutilizable, puesto que implica un número infinito de condiciones. Se sigue que no se podrá enunciar más que condiciones suficientes de convergencia y divergencia llamadas a menudo criterios. Su aplicación, bajo forma de reglas, contendrá siempre un caso dudoso que necesitará para ser esclarecido un criterio más fino. Estos criterios serán obtenidos por comparación con series tales como la serie geométrica $u_n = a^{n-1}$,

de la que se ha podido hacer el estudio, y será necesario, para obtener estos criterios, establecer un cierto número de teoremas de comparación.

I. TEOREMAS DE COMPARACION

Demostremos que u_n no puede diverger más que de una sola manera. La sucesión S_n es, en efecto, monótona creciente, pues:

$$S_{n+1} - S_n = u_{n+1} > 0 \quad \forall n > N.$$

Toda sucesión de reales monótona creciente, o bien está acotada superiormente, o bien no está acotada superiormente.

En el primer caso, se sabe que admite un límite y u_n converge.

En el segundo caso, tiende hacia infinito y u_n diverge, pues, de una sola manera.

1.° *Si v_n converge y si $u_n \leqslant bv_n$, $\forall\ n > N$ y $b > 0$, luego u_n converge.*

Pongamos:

$$T_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n = T_N + T_n - T_N,$$

se tiene:

$$S_n = S_N + S_n - S_N \leqslant S_N + b(T_n - T_N),$$

donde S_n está acotada y u_n converge.

Sea, por ejemplo, el desarrollo decimal de $\pi = 3{,}1415926\ldots$ y a_n su decimal de rango n, estudiar la serie $u_n = \dfrac{a_n}{2^n}$. Como para todo n, $a_n \leqslant 9$ y $v_n = \dfrac{1}{2^n}$ converge; u_n converge según el teorema precedente.

2.° *Si v_n diverge y si $u_n \geqslant av_n$, para todo $n > N$ y $a > 0$, entonces u_n diverge.*

De $S_n = S_N + S_n - S_N \geqslant S_N + a(T_n - T_N)$, se deduce que S_n tiende hacia $+\infty$, puesto que T_n tiende hacia $+\infty$, y así u_n diverge.

Sea, por ejemplo, $u_n = \dfrac{\ln n}{n}$, designando por ln el logaritmo neperiano de $u_n > \dfrac{1}{n}$ para $n > e$, se deduce que u_n diverge.

3.° De estos teoremas se deduce una regla práctica de convergencia muy usada en las aplicaciones:

Si u_n y v_n son infinitésimos equivalentes cuando n tiende a infinito, las series u_n y v_n son de la misma naturaleza.

Decir que u_n y v_n son infinitésimos equivalentes es decir que la relación $\dfrac{u_n}{v_n}$ tiende hacia 1 cuando n tiende a infinito, puesto que a partir de un cierto valor u_n queda comprendida entre:

$$v_n(1 - \varepsilon) < u_n < v_n(1 + \varepsilon)$$

para ε comprendido entre 0 y $\dfrac{1}{2}$, por ejemplo, lo que justifica la conclusión.

Sea, por ejemplo, $u_n = \ln(1 + a^n)$, donde a, real, está comprendido entre 0 y 1. Se sabe que $u_n \sim a^n$ y, por consecuencia, que u_n converge.

Al resultado es necesario añadir, en un orden de ideas por completo diferente, el teorema fundamental de comparación de una serie y de una integral.

Si la función $f(x)$ es definida, positiva y decreciente para

$x > a > 0$, *la serie* $f(a) + f(a+1) + \dots + f(a+n) + \dots$ *es de la misma naturaleza que la integral*

$$\int_a^n f(x)\,dx$$

cuando n aumenta indefinidamente, es decir, que ella converge si la integral admite un límite y diverge en el caso contrario.

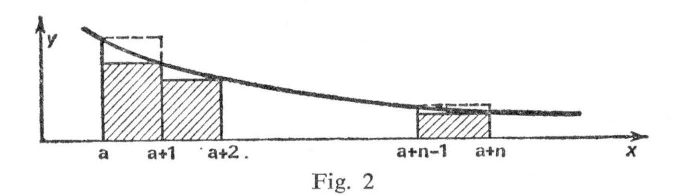


Fig. 2

El gráfico precedente (fig. 2) ayuda a seguir el razonamiento.

Como $f(x)$ es decreciente para $x > a$:

$$f(a+n) \leqslant f(x) \leqslant f(a+n-1).$$

Integrando estas desigualdades, se obtiene:

$$f(a+n) < \int_{a+n-1}^{a+n} f(x)\,dx < f(a+n-1).$$

Sumando, se puede escribir:

[9] $$S_n - f(a) = f(a+1) + \dots + f(a+n)$$
$$< \int_a^{a+n} f(x)\,dx < S_{n-1}.$$

Si la integral de las desigualdades [9] converge hacia un límite finito L, S_n está mayorado para $L + f(a)$ y, por consecuencia, la serie de término general $u_n = f(a+n)$ converge, mientras que si la integral no tiene límite y, por tanto, aumenta indefinidamente, puesto que $f(x)$ es supuestamente positiva, la serie diverge.

Con la ayuda del grafo precedente se obtiene con facilidad un límite superior del resto R_n, a saber:

$$R_n < \int_{a+n}^{+\infty} f(x)\,dx,$$

que se obtiene rigurosamente reemplazando en la primer desigualdad [9] a por $a+n$ y $a+n$ por $+\infty$ cuando u_n converge.

Además, siendo integral y serie de la misma naturaleza, la naturaleza de la integral informa sobre la naturaleza de la serie como vimos, pero la naturaleza de la serie, si es conocida, informará sobre la naturaleza de la integral.

Un ejemplo particularmente importante de aplicación de esta regla, denominada a menudo de Cauchy, está provisto por el estudio de la serie $\frac{1}{n^\alpha}$, donde α es un número real. En efecto:

$$\int_a^n \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha}, \text{ si } \alpha \neq 1.$$

Resulta que para $\alpha > 1$ la serie $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$ converge y para $\alpha < 1$ diverge. Su suma está designada por $\zeta(\alpha)$; es la función ζ de Riemann, que acaba de ser definida aquí para α, real y mayor que 1.

Este resultado completa prácticamente el teorema de comparación sobre los equivalentes infinitésimos, pues cuando se elige $\frac{1}{n}$ como infinitésimo principal, el orden de u_n, si existe, determina la naturaleza de la serie de término general u_n. Si, por ejemplo, $u_n = \operatorname{sen} \frac{n}{1+n^p}$, se obtiene

$u_n \sim n^{1-p}$, de donde: u_n converge si, y solamente si, el real p es superior a 2.

El teorema de comparación precedente se aplica a numerosas series. Citaremos, en particular, las series de Bertrand:

$$u_n = \frac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}}$$

que comprenden las series Riemann para el caso particular $\beta = 0$ y que nos dan por consecuencia criterios de convergencia más finos.

a) Si $\alpha > 1$, u_n converge para todo β fijado, real. Sea γ comprendido entre 1 y α. Pongamos $v_n = \dfrac{1}{n^{\gamma}}$ y formemos:

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{n^{\gamma}}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}} = \frac{1}{n^{\alpha-\gamma}(\ln n)^{\beta}}$$

que tiende hacia 0 cuando n tiende hacia infinito. Existe, pues, un N tal que $u_n < v_n$, $\forall\ n > N$, y como v_n converge, u_n converge.

b) Por lo mismo, si $\alpha < 1$, u_n diverge para todo β, puesto que toda potencia positiva de x impone su límite al logaritmo.

c) Queda el caso $\alpha = \beta = 1$. Ahora bien, un primitivo de $\dfrac{1}{x \ln x}$ es $\ln(\ln x)$, que tiende hacia infinito con x y, por tanto, u_n diverge.

Se generaliza con la notación $\ln_2 n$ la expresión $\ln(\ln n), \ldots$:

$$\ln_p = \ln[\ln(\ldots(\ln))]$$

el segundo miembro contiene p veces la operación ln, siendo, en consecuencia, definido solamente para n suficientemente grande.

La serie $u_n = \dfrac{1}{n^{a_1}(\ln n)^{a_2}(\ln_2 n)^{a_3}}$ converge para $a_1 > 1$, diverge para $a_1 < 1$.

Para $a_1 = 1$, converge si $a_2 > 1$, diverge si $a_2 < 1$, y para $a_1 = a_2 = 1$, converge para a_3 superior a 1 y diverge para $a_3 \leqslant 1$. Basta para probarlo el observar que $\ln_2 x$ es un primitivo de $\dfrac{1}{x \ln x}$, lo que permite aplicar el teorema de comparación con una integral. Más generalmente $\ln_{p+1} x$ es un primitivo de:

$$\frac{1}{x(\ln x)(\ln_2 x)\ldots(\ln_p x)},$$

que muestra que la serie:

$$u_n = \frac{1}{n(\ln n)(\ln_2 n)\ldots(\ln_p n)}$$

diverge para todo p fijado, tan grande como sea.

4.° Se puede todavía enunciar un cuarto teorema de comparación que no es más que una forma un poco diferente de los dos primeros.

a) Si, para todo $n > N$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$, y si v_n converge, entonces u_n converge. En efecto, la hipótesis se escribe:

$$\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leqslant \frac{u_n}{v_n} \leqslant \frac{u_N}{v_N}$$

y, siendo fija la relación $\dfrac{u_N}{v_N}$, la serie u_n converge, puesto que v_n converge.

b) Por lo mismo, si para todo $n > N$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$,

y si v_n diverge, entonces u_n diverge. La demostración procede de la misma manera.

II. REGLAS DE D'ALEMBERT Y DE CAUCHY

a) La aplicación del teorema precedente a una serie u_n, tomando sucesivamente $v_n = k^n$ donde $0 < k < 1$ y $v_n = 1$, nos da dos enunciados:

1.º *Si para todo $n > N$ existe $k < 1$ tal que $\frac{u_{n+1}}{u_n} < k$, u_n converge.*

2.º *Si para todo $n > N$ hay un $u_{n+1} \geqslant u_n$, u_n diverge.*

Cuando u_n converge se obtiene un límite superior del resto, pues:

$$R_n < u_n(k + k^2 + \dots) = \frac{u_n k}{1 - k}$$

utilizada en el cálculo numérico de la suma.

La regla precedente es a menudo denominada de D'Alembert. Se le aplica prácticamente del modo siguiente:

Se forma $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ y se busca si esta relación tiene un límite cuando n tiende hacia $+\infty$. Si esto es así, sea l este límite. Entonces, si $l < 1$, u_n converge; si $l > 1$, u_n diverge, y si $l = 1$, no se puede afirmar nada, salvo si $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tiende hacia 1 para valores superiores, en cuyo caso la serie diverge. En efecto, a partir de un cierto valor, si l existe se tiene:

$$l - \varepsilon < u_n < l + \varepsilon \quad \forall\, \varepsilon > 0,$$

lo que permite concluir si $l \neq 1$. Si $l = 1 + \varepsilon(n)$ con $\varepsilon(n) \geqslant 0$,

las desigualdades $u_N \leqslant u_{N+1}, \dots \leqslant u_n$ implican la divergencia de u_n.

La regla de D'Alembert es cómoda cuando u_n es un producto donde se contienen factoriales. Así, sea $u_n = n! \frac{a^n}{n^n}$.

Se forma:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \quad \text{que tiende hacia } \frac{a}{e}.$$

Si $a > e$, u_n diverge; si $a < e$, u_n converge.

En fin, si $a = e$, u_n diverge, puesto que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tiende hacia 1 para valores superiores, siendo la serie $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ monótona, creciente y, por tanto, inferior a su límite e.

b) Regla de Cauchy. Límite superior de una sucesión positiva.—La regla de Cauchy resulta de la comparación directa de u_n y de la serie geométrica k^n. Se enuncia de este modo:

1.º *Si para todo $n > N$ existe k, tal que $\sqrt[n]{u_n} < k < 1$, u_n es convergente.*

2.º *Si para una infinidad de valores de n, $\sqrt[n]{u_n} \geqslant 1$, u_n es divergente,* pues u_n no tiende a cero, puesto que hay los n bastante grandes para los cuales u_n es superior a 1.

Esta regla se enuncia de un modo equivalente introduciendo el límite superior de la sucesión u_n. Se dice que una sucesión u_n de términos todos positivos admite un límite superior si existe un real L, finito o no, y un entero N tal que para todo $n > N$, $u_n < L + \varepsilon$ y una *infinidad de n* tales que $L - \varepsilon < u_n$.

Se escribe $L = \limsup_{n=+\infty} u_n$, donde todavía $L = \overline{\lim}_{n=+\infty} u_n$.

Si $L = +\infty$, la sucesión u_n no está limitada y hay, para todo $A > 0$, una infinidad de n tales que $u_n > A$.

La diferencia con la noción habitual de límite es precisamente introducida por esta «infinidad de n», que no comprende necesariamente todos los n como en el caso del límite habitual.

Por lo mismo, la sucesión u_n tiene un límite inferior si $l - \varepsilon < u_n$, $\forall n > N$, y si $u_n < l + \varepsilon$ para una infinidad de n. Se escribe $\underline{\lim}_{n=+\infty} u_n = \liminf_{n=+\infty} u_n$.

Si $L = l$, este valor común es el límite habitual, y recíprocamente. Sea, por ejemplo, la sucesión u_n definida por:

$$u_{4p+1} = 1 + \frac{1}{4p}, \quad u_{4p+2} = 2 + \frac{1}{4p},$$

$$u_{4p+3} = 3 + \frac{1}{4p}, \quad u_{4p+4} = 4 + \frac{1}{4p}.$$

El real 4 es $\limsup_{n=+\infty} u_n$ y $1 = \liminf_{n=+\infty} u_n$, pero 2 y 3 no son límites superior o inferior, sino sólo puntos de acumulación.

Enunciemos ahora la regla de Cauchy con esta definición:

1.° *Si* $\limsup_{n=+\infty} \sqrt[n]{u_n} = L < 1$, u_n *converge*, pues existe k tal que $L + \varepsilon < k < 1$, implicando, para todo $n > N$, $u_n < (L + \varepsilon)^n < k^n < 1$, de donde la convergencia.

2.° *Si* $\limsup_{n=+\infty} \sqrt[n]{u_n} = L > 1$, u_n *diverge*, pues existe una infinidad de n, para los cuales:

$$u_n > (L - \varepsilon)^n > 1$$

y entonces u_n no tiende hacia 0.

Estos resultados son naturalmente válidos si u_n tiene un límite λ y no sólo un límite superior, pero el interés del límite superior reside en el teorema siguiente que nosotros admitiremos.

Toda sucesión infinita positiva admite un límite superior (finito o no) y, por lo mismo, un límite inferior, positivo o nulo.

Por el contrario, nosotros sabemos que el límite habitual, incluso extendido al infinito, no existe siempre.

c) Es interesante comparar las reglas de Cauchy y de D'Alembert. Se puede en principio mostrar que, si $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tiene un límite, $\sqrt[n]{u_n}$ tiene un límite igual y, por tanto, se apoya sobre la definición del límite.

Mas la recíproca es inexacta, como lo muestra el ejemplo siguiente:

Sea la sucesión:

$$u_1 = a, \quad u_2 = ab, \quad u_3 = a^2b, \ldots,$$
$$u_{2n} = a^n b^n, \quad u_{2n+1} = a^{n+1} b^n, \ldots$$

Se obtienen alternativamente para $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, a o b, de suerte que no se puede concluir en cuanto a la naturaleza de la serie u_n si $0 < a < 1 < b$. Por el contrario, se ve fácilmente que $\sqrt[n]{u_n}$ tiene un límite $\sqrt{ab}$, de tal modo que se le puede aplicar la regla de Cauchy y que u_n converge si $ab < 1$ y diverge si $ab > 1$.

El criterio de Cauchy es, por tanto, más general que el de D'Alembert, pero su empleo puede parecer limitado en la práctica a causa de la presencia de factoriales o de productos cuyo número aumenta indefinidamente con el valor del término general u_n. Para paliar este inconveniente se utiliza la fórmula de Stirling.

III. FORMULA DE STIRLING

Definamos una función $f(n)$ poniendo:

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{n}\, f(n)$$

y calculemos

$$\frac{f(n+1)}{f(n)} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+\frac{1}{2}} e.$$

De donde, tomando los logaritmos:

$$u_n = \ln f(n+1) - \ln f(n)$$

$$= 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + 0\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]$$

donde 0 es el símbolo de Landau.

y, en fin: $$u_n \sim -\frac{1}{12n^2}$$

que muestra que u_n es convergente. Se sigue que $\ln f(n)$ tiene un límite y, por consecuencia, $f(n)$ también. Pongamos:

$$C = \lim_{n=+\infty} f(n) = \lim_{n=+\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{n}}$$

y para calcular C es necesario utilizar la fórmula de Wallis, que escribiremos:

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \lim_{n=+\infty} \frac{2 . 4 \ldots 2n}{1 . 3 \ldots (2n-1)} \times \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

bajo forma de producto infinito. Se encuentra entonces $C = \sqrt{2\pi}$ y se puede precisar la fórmula de Stirling desarrollando $n!$ bajo la forma:

[10] $$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}\,[1 + \varepsilon(n)]$$

con $$\lim_{n=+\infty} \varepsilon(n) = 0.$$

A $n!$, y por consecuencia a la fórmula de Stirling, se puede asociar la función gran gamma de x definida por la integral:

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

que tiene un sentido para $x > 0$. Integrando por partes, lo que es fácil, se encuentra:

$$\Gamma(1) = 1 \quad \Gamma(n) = (n-1)!$$

y la fórmula [10] provee un desarrollo asintótico de $\Gamma(x)$.

He aquí un ejemplo de aplicación. Sea la serie $u_n = \frac{n^n e^{-n}}{n!}$. Parece natural formar:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{e}$$

que tiende hacia 1 para valores inferiores, si bien la aplicación de la regla $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ no permite concluir. Pero apliquemos la fórmula [10]. Se obtiene $u_n \sim \frac{n^n e^{-n}}{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$

y, por tanto, u_n diverge. La fórmula de Stirling permite generalizar considerablemente el empleo del criterio de Cauchy.

IV. CONSTANTE DE EULER

Esta constante puede ser introducida como límite de la sucesión:

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

Mostremos en principio que s_n tiene un límite y, para esto, asociémosle la serie de término general:

$$u_n = s_{n+1} - s_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n$$

de donde:

$$u_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim -\frac{1}{2n^2}.$$

Luego u_n converge y s_n tiene un límite C llamado constante de Euler. Se escribe:

[11] $$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \ln n + C + \varepsilon(n)$$

con $$\lim_{n=+\infty} \varepsilon(n) = 0.$$

Comparando la serie $\frac{1}{n}$ a la integral de $\frac{1}{x}$ se observa que C está comprendido entre 0 y 1. Más precisamente, $C = 0{,}5772\dots$

He aquí algunas aplicaciones de [11]. Pongamos:

$$t_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}.$$

Apliquemos [11]. Se obtiene:

$$t_n = \ln 2n + C + \varepsilon(2n) - \ln n - C - \varepsilon(n)$$

que tiende hacia $\ln 2$.

Sea ahora la serie:

$$u_n = a^{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}}.$$

La relación $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tiende hacia 1, siempre, si $a > 1$, tiende hacia 1 para valores superiores y se puede concluir la divergencia de u_n. Así, la regla de d'Alembert es insuficiente. Por el contrario, la fórmula [11] nos da la solución, pues muestra que $u_n \sim a^{C+\ln n}$ y es así de la misma naturaleza que $a^{\ln n} = n^{\ln a}$, de donde $a < e^{-1}$ serie convergente y $a \geqslant e^{-1}$ serie divergente.

Este ejemplo, y este fracaso de la regla de d'Alembert, sugiere profundizar en el estudio de la relación $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, haciendo uso del cuarto teorema de comparación y tomando para serie v_n la serie de Riemann. Se va a obtener así un nuevo criterio conocido en general bajo el nombre de regla de Duhamel.

V. REGLA DE DUHAMEL

Pongamos:

$$v_n = \frac{1}{n^a}$$

y formemos:

[12] $$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^a} = 1 - \frac{a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

siendo o el símbolo de Landau.

Sea ahora una serie u_n, para la cual la relación $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to 1$.

Pongamos $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \varepsilon(n)$. Si a partir de un cierto valor $\varepsilon(n)$ es negativo, entonces u_n diverge. Examinemos el caso donde $\varepsilon(n)$ es constantemente positivo a partir de un cierto valor, es decir, el caso donde la relación $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tiende hacia 1 para valores inferiores.

Sea entonces l el límite de $n\varepsilon(n)$ para n tendiendo hacia infinito suponiendo que este límite existe. La regla de Duhamel se enuncia así:

— *Si l es superior a 1 la serie u_n converge.*
— *Si l es inferior a 1 la serie u_n diverge.*
— *Si l es igual a 1 no se podrá decir nada, salvo si 1 es alcanzado por valores inferiores.*

Si, en efecto, l es superior a 1, existe N tal que para todo $n > N$:

$$n\varepsilon(n) > l - \varepsilon' > a > 1,$$

siendo ε' positivo y, por consecuencia:

$$1 - \varepsilon(n) < 1 - \frac{a}{n}$$

que muestra (4.ª teoría de comparación) que u_n converge.

Se razona del mismo modo si l es inferior a 1. Cuando $l = 1$, si $n\varepsilon(n) = 1 - \varepsilon''(n)$ con $\varepsilon''(n)$ positivo para todo n superior a N, lo que viene a decir que 1 es alcanzado por valores inferiores; entonces la condición:

$$n\varepsilon(n) < 1,$$

que equivale a $1 - \varepsilon(n) > 1 - \frac{1}{n}$, muestra que u_n diverge, puesto que $v_n = \frac{1}{n^a}$ diverge para $a = 1$.

Aplicación.—Sea la serie:

$$u_n = (-1)^n \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{n!}$$

donde m es real.

Esta es una serie de términos positivos a partir de un cierto valor. Formemos:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n-m}{n+1} = 1 - \frac{m+1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

y la regla de Duhamel nos da fácilmente la conclusión: u_n converge si m es positivo y diverge si m es negativo.

CAPITULO III

SERIES REALES O COMPLEJOS

Estudiamos en principio las series reales, que no son ni de términos positivos ni de términos negativos; esto quiere decir que, cualquiera que sea N positivo fijado, las u_n para $n > N$ no son todas del mismo signo. La teoría de estas series está dominada por un teorema fundamental relativo a la convergencia de la serie de los valores absolutos que está asociada a la serie u_n.

I. CONVERGENCIA ABSOLUTA

a) *Si la serie* $|u_n|$ (serie de valores absolutos) *converge, la serie* u_n *converge y es llamada absolutamente convergente.*

b) *Si la serie* $|u_n|$ *diverge, la serie* u_n *puede diverger o converger, y en este último caso se le denomina semiconvergente.*

Sea S_n la suma de los n primeros términos de la serie u_n y Σ_n la suma de los n primeros términos de la serie $|u_n|$.

1.° De $|S_m - S_n| \leqslant |u_{n+1}| + \dots + |u_m| = \Sigma_m - \Sigma_n$ para todos $m, n > N$, se deduce:

$$|S_m - S_n| < \varepsilon \text{ (Cauchy) si } \Sigma_m - \Sigma_n < \varepsilon$$

y, por consecuencia, la convergencia de la serie $|u_n|$ implica la convergencia de la serie u_n.

2.º Si, por hipótesis, $|u_n|$ diverge y si u_n converge se dice que u_n es semiconvergente (o convergente, o incluso simplemente convergente, siendo equivalentes estas tres expresiones), pero no es necesario probar la existencia de tales series, existencia que es conocida desde Leibniz, quien ha demostrado el primero la convergencia de la serie armónica alternada definida por:

$$u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

II. TEOREMA DE LEIBNIZ

Si, a partir de un cierto rango, u_n es alternativamente positiva y negativa, se dice que la serie u_n es una serie alternada. Si, por el contrario, u_n decrece constantemente tendiendo hacia cero, la serie u_n es convergente.

Escribamos esta serie:

$$u_1 - u_2 + u_3 - \dots + u_{2p+1} - u_{2p+2} \dots$$

con:

$$u_1 \geqslant u_2 \geqslant \dots \geqslant u_{2p-1} \geqslant u_{2p} \geqslant u_{2p+1} \geqslant \dots$$

suponiendo que las hipótesis son verificadas a partir de u_1, lo que es siempre posible afirmar, puesto que la supresión de un número cualquiera de primeros términos irregulares no modifica la naturaleza de la serie.

Se obtiene, por una primera asociación de términos:

[13] $$S_{2p} = (u_1 - u_2) + \dots + (u_{2p-1} - u_{2p}) > 0$$

y por una segunda asociación de términos:

[14] $$S_{2p} = u_1 - (u_2 - u_3) - \dots - (u_{2p-2} - u_{2p-1}) - u_{2p} < u_1$$

siendo todos los paréntesis positivos en [13] como en [14]. La serie S_{2p}, siendo positiva según [13] y acotada superiormente según [14] admite un límite S. Además, como u_{2p+1} tiende hacia cero, $S_{2p+1} = S_{2p} + u_{2p+1}$ tiene un mismo límite S que S_{2p} y u_n converge, lo que demuestra la proposición.

En fin, escribiendo:

$$S_{2p+1} = u_1 - (u_2 - u_3) - \dots - (u_{2p} - u_{2p+1})$$

se constata que S_{2p+1} es monótona decreciente y tiende, pues, hacia S para valores superiores, de donde el encuadramiento:

$$S_{2p} < S < S_{2p+1}.$$

La diferencia $S - S_n$ es inferior a u_{n+1} en valor absoluto y del mismo signo que u_{n+1}.

Sea, por ejemplo, la serie $u_n = (-1)^n \dfrac{\ln n}{n}$.

Es alternada, y u_n tiende hacia cero cuando n tiende hacia $+\infty$. Pongamos $y = \dfrac{\ln x}{x}$ y derivemos esta función sobre el cuerpo de los reales. La derivada:

$$y'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

es negativa para $x > e$, puesto que u_n decrece en valor absoluto para n tendiendo hacia infinito y u_n converge.

III. TRANSFORMACIONES DE LAS SERIES Y OBSERVACIONES

a) Las transformaciones más simples consisten en reagrupar dos o más términos para adicionarlos sin cambiar su orden y ensayar reducir el estudio de la serie al estudio de una serie de términos positivos, por ejemplo. Así, sea la serie:

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \dots + \frac{1}{3p-2} + \frac{1}{3p-1} - \frac{2}{3p} + \dots$$

Pongamos:

$$v_p = \frac{1}{3p-2} + \frac{1}{3p-1} - \frac{2}{3p} \sim \frac{1}{3p^2}.$$

Pues $\sum_{p=1}^{p=p} v_p = S_{3p}$ tiene un límite, y como $\frac{1}{3p+1}$ y $\frac{1}{3p+2}$ tienden hacia cero, S_{3p+1} y S_{3p+2} tiene el mismo límite y u_n converge.

La transformación más importante es la transformación de Abel, que nosotros expondremos en este capítulo pero, no obstante, deseamos hacer dos observaciones.

b) El teorema sobre las series alternadas permite decidir respecto a la convergencia de ciertas integrales:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$$

para las cuales, la función continua $f(x)$ es, alternativamente, positiva y negativa para x variando de $a > 0$ a $+\infty$. Sea, por ejemplo, la integral de Fresnel:

$$I = \int_0^{+\infty} \operatorname{sen} x^2\, dx.$$

Pongamos $u_n = \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \operatorname{sen} x^2\, dx.$ Se obtiene:

$$I = \sum_{n+0}^{+\infty} u_n.$$

Pongamos $x^2 = v + n\pi,$ de donde:

$$u_n = (-1)^n \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} v}{2\sqrt{v + n\pi}}\, dv$$

y u_n es el término general de una serie alternada que tiende hacia cero y tal que $|u_n|$ es decreciente. Luego la integral I existe, aunque $|u_n|$ diverge.

c) No se debe aplicar sin precaución a las series de términos cualesquiera las reglas demostradas para las series de términos positivos.

Es así, por ejemplo, cómo los términos generales de dos series, u_n y v_n, pueden ser equivalentes incluso si las series u_n y v_n no son de la misma naturaleza. Así:

$$u_n = \frac{(-1)^n}{(\sqrt{n} + \cos n\pi)} \qquad v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

son tales que $u_n \sim v_n$; ahora bien, v_n converge, según el teorema de Leibniz, mientras que u_n diverge, pues

$$u_p = \frac{1}{(1 + \sqrt{2p})} + \frac{1}{(1 - \sqrt{2p+1})} \sim \frac{-1}{p} \text{ diverge.}$$

IV. SERIES COMPLEJAS

Son estas series de la forma $w_n = u_n + iv_n$, donde u_n y v_n son series a términos reales y su estudio se reduce al es-

tudio de dos series reales, pero todavía es aquí esencial el teorema de convergencia absoluta.

Si la serie de los módulos converge, la serie converge y es llamada absolutamente convergente.

La igualdad $|w_n| = \sqrt{u_n^2 + v_n^2}$ implica $|u_n|$ y $|v_n|$ inferiores a $|w_n|$, si bien las dos series $|u_n|$ y $|v_n|$ convergen absolutamente y, por tanto, w_n. Damos como ejemplo la serie $w_n = \dfrac{z^n}{n!}$. Formemos:

$$\left|\frac{w_{n+1}}{w_n}\right| = \frac{|z|}{n+1} \quad \text{que tiende hacia cero}$$

de tal suerte que la serie w_n es absolutamente convergente para todo valor complejo de z.

V. TRANSFORMACION DE ABEL

Para una serie cualquiera de término general v_n nosotros ponemos:

[15] $$R_n^m = v_n + v_{n+1} + \dots + v_m \quad \text{con} \quad m \geqslant n.$$

1.° Supongamos que $|R_n^m|$ sea mayorado, para todos n, m superiores a un N cualquiera, pero fijado, lo que viene a decir que el mayorante M de $|R_n^m|$ no depende sino de N.

De [15] se deducen las igualdades:

[16] $$v_n = R_n^n \quad v_{n+1} = R_n^{n+1} - R_n^n,$$
$$v_{n+2} = R_n^{n+2} - R_n^{n+1} \;\dots,\; v_{m-1} = R_n^{m-1} - R_n^{m-2},$$
$$v_m = R_n^m - R_n^{m-1}$$

2.° Sea ahora la serie de término general:

$$u_n = v_n \varepsilon_n$$

de la que nosotros queremos estudiar la convergencia. Para ello, consideremos el resto r_n y formemos:

$$r_n^m = \varepsilon_n v_n + \varepsilon_{n+1} v_{n+1} + \varepsilon_{n+2} v_{n+2} + \dots + \varepsilon_m v_m$$

La transformación de Abel consiste en reemplazar los v_n para las igualdades [16] *y en ordenar la suma r_n^m siguiendo los R_n^m.* Se obtiene:

$$r_n^m = \varepsilon_n R_n^n + \varepsilon_{n+1}(R_n^{n+1} - R_n^n) + \dots$$
$$+ \varepsilon_{m-1}(R_n^{m-1} - R_n^{m-2}) + \varepsilon_m(R_n^m - R_n^{m-1})$$

de donde, ordenando como se ha dicho:

$$r_n^m = R_n^n(\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}) + R_n^{n+1}(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+2}) + \dots$$
$$+ R_n^{m-1}(\varepsilon_{m-1} - \varepsilon_m) + \varepsilon_m R_n^m$$

lo que permite escribir:

[17] $$|r_n^m| \leqslant M(|\varepsilon - \varepsilon_{n+1}| + |\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+2}| + \dots$$
$$+ |\varepsilon_{m-1} - \varepsilon_m|) + |\varepsilon_m| M.$$

3.° De esta transformación podemos deducir un teorema concerniente a la convergencia de la serie u_n si suponemos que la serie de término general:

[18] $$|\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}|$$

es convergente y que $\lim\limits_{n=+\infty} \varepsilon_n = 0$ para n infinito.

En efecto, el paréntesis de [17] puede ser hecho tan pequeño como se quiera tomando n, m bastante grandes, puesto que este paréntesis representa el resto de la serie [18] supuesta convergente. Como, por otra parte, ε_n tiende hacia cero, se sigue que r_n^m tiende hacia cero y que la serie u_n converge.

Un caso particular es de un especial interés, y es aquel donde los ε_n *son números positivos, decrecientes y que tienden hacia cero*. En efecto, el paréntesis en el segundo miembro de [17] se escribe entonces:

$$\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1} + \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+2} + \ldots + \varepsilon_{m-1} - \varepsilon_m = \varepsilon_n - \varepsilon_m$$

lo cual muestra que la serie [18] converge y, como ε_n tiende hacia cero, la proposición está establecida y la serie $u_n = \varepsilon_n v_n$ es convergente.

VI. APLICACION

La transformación de Abel es de uso corriente; he aquí una aplicación.

Tomemos $v_n = \exp ina$ (exp, leer exponencial), siendo a un real dado diferente de $2k\pi$.

Luego:

$$R_n^m = \exp ina\,[1 + \exp ia + \ldots + \exp i(m-n)\,a]$$

$$= \exp ina \frac{\exp i(m-n+1)\,a - 1}{\exp ia - 1}$$

y:

$$|R_n^m| \leqslant \frac{2}{|\exp ia - 1|} = \frac{2}{|\cos a - 1 + i \operatorname{sen} a|} = \frac{1}{|\operatorname{sen} \frac{1}{2} a|}.$$

Como $a \neq 2k\pi$, $\operatorname{sen} \frac{1}{2} a \neq 0$ y R_n^m es limitado para todos n, m.

En consecuencia, el teorema precedente se aplica y las series:

$$u_n = \frac{\cos na}{n^\alpha} \qquad v_n = \frac{\operatorname{sen} na}{n^\alpha}$$

convergen si α positivo, verificando la serie $\varepsilon_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ las condiciones precedentes.

VII. ORDEN DE LOS TERMINOS DE UNA SERIE

Es necesario precisar, en principio, lo que se entiende por cambiar el orden de los términos de una serie.

1.° Sea n cualquiera, pero fijado. Consideremos la suma parcial S_n de una serie y modifiquemos el orden de los términos en S_n. Si todos los u_n pertenecen a un grupo aditivo conmutativo, S_n no es modificada, y se puede seguidamente estudiar su límite haciendo crecer n indefinidamente. No se modifica así ni la naturaleza ni la suma de la serie, ni, por otra parte, la serie misma, y nosotros hemos procedido de tal manera para estudiar una serie cualquiera de reales cuando hemos agrupado en S_n separadamente los términos positivos y los términos negativos.

He aquí otro ejemplo. Vayamos a calcular la suma de la serie armónica alternada. Se plantea, observando que $S_{2n+1} - S_{2n} = \dfrac{1}{2n+1} \to 0$ si $n \to +\infty$:

$$S_{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$$

y estando fijado n, se puede escribir:

$$S_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}$$

$$-2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n}\right)$$

donde:

$$S_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}$$

$$- \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)$$

y utilizando la constante de Euler:

$$S_{2n} = \ln 2n + C + \varepsilon(2n) - \ln n - C - \varepsilon(n)$$

y S_{2n} tiende entonces hacia $\ln \frac{2n}{n} = \ln 2$, cuando n tiende hacia infinito.

2.° De distinta manera se puede modificar el orden de los términos de una serie cambiando la suma o la naturaleza de la serie.

Sea una serie:

$$u_1,\ u_2,\ \dots,\ u_n,\ \dots = (u_n)$$

y una serie:

$$v_1,\ v_2,\ \dots,\ v_n,\ \dots = (v_n).$$

Nosotros diremos que (v_n) se ha obtenido a partir de (u_n) modificando el orden de los términos si (v_n) no contiene otros términos que los u_n y si todo término de la serie u_n figura en la serie v_n. Se puede decir entonces que el conjunto de las v_n se deduce del conjunto de las u_n por sustitución (biyección del conjunto de las u_n en sí mismo).

Siendo esto así, nosotros demostraremos el teorema fundamental.

Si la serie u_n converge absolutamente, la serie v_n obtenida por sustitución converge hacia la misma suma.

Sean S_n y T_n las sumas parciales de u_n y de v_n. Tomemos p bastante grande para que T_p contenga todos los términos de S_n, lo que permite escribir:

$$T_p = S_n + P_n$$

siendo P_n una suma de términos de índices superiores a n.

Llamemos R_n al resto de la serie $|u_n|$, sea:

$$R_n = |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + |u_{n+3}| + \dots$$

De $|T_p - S_n| \leqslant |P_n| \leqslant R_n$, se deduce que, cuando n tiende hacia infinito, R_n tiende hacia cero, y que T_p tiende hacia el límite S de S_n.

Se dice entonces que los u_n forman una *familia sumable* y acabamos de ver que la convergencia absoluta implica la sumabilidad, es decir, la independencia de la suma frente a frente del orden de los términos; pero este resultado no es válido si la serie no es absolutamente convergente, como lo muestra el ejemplo siguiente.

Sea $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$, que se transcribe bajo la forma:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} \dots$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{4p-3}} + \frac{1}{\sqrt{4p-1}} - \frac{1}{\sqrt{2p}}.$$

Esto es una sustitución del conjunto de los u_n.

Pongamos:

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{4p-3}} + \frac{1}{\sqrt{4p-1}} - \frac{1}{\sqrt{2p}}$$

$$\sim \frac{1}{\sqrt{p}} - \frac{1}{\sqrt{2p}} = \frac{1}{\sqrt{p}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

lo que muestra que la suma $S_{3p} = \sum_1^p v_p$ tiende hacia infinito y que, en consecuencia, la serie deducida de u_n por la sustitución precedente diverge.

VIII. REGLA DE WEIERSTRASS

El límite de una suma es la suma de los límites cuando el número de términos de la suma es finito. ¿Puede extenderse este resultado al infinito? ¿De una forma precisa, si $u_n(m)$ es el término general de una serie que depende del entero m y si $\lim\limits_{n=+\infty} u_n(m) = u_n$ y $\sum_1^{+\infty} u_n(m) = U(m)$, tenemos:

$$\sum_1^{+\infty} u_n = \lim_{m=+\infty} U(m) = U?$$

La regla de Weierstrass provee una condición suficiente.

Si, a partir de un cierto valor m_0, $|u_n(m)| < v_n$, *convergente, entonces* U(m) *tiene un límite* U *para* m *infinito* y $U = \sum_1^{+\infty} u_n$, es decir que el límite de la suma es de nuevo la suma de los límites.

En efecto, de $|u_n(m)| < v_n$ se deduce $|u_n| \leqslant v_n$ (pues $u_n > v_n$ estaría en contradicción con la hipótesis). Así, u_n converge absolutamente. Sea U su suma. Formemos $U_m - U$, que se puede escribir $\sum_1^{\infty}(u_n(m) - u_n)$, puesto que las series son absolutamente convergentes, lo cual permite cambiar el orden de los términos. Ahora bien:

$$U_m - U = \sum_1^{N}(u_n(m) - u_n) + \sum_{N+1}^{+\infty}(u_n(m) - u_n),$$

lo cual implica:

$$|U_m - U| \leqslant \sum_1^{N} |u_n(m) - u_n| + 2\sum_{N+1}^{+\infty} v_n.$$

Se fija en principio N de modo que el último término sea tan pequeño como se quiera y, seguidamente, se elige M tal que, para todo m superior a M:

$$|u_n(m) - u_n| < \frac{\varepsilon}{N},$$

lo que siempre es posible, pues $u_n(m) \to u_n$, y puesto que los $u_n(m)$ son en número finito N.

CAPITULO IV

OPERACIONES SOBRE LAS SERIES

I. ADICION DE LAS SERIES

Sean dos series u_n y v_n de términos cualesquiera. Formemos la serie:

$$p_n = u_n + v_n.$$

Será llamada *serie suma* de u_n y v_n.

Denotemos como S_n, T_n y P_n a las sumas parciales de las series u_n, v_n y p_n.

Para todo n cualquiera, pero *fijado*, se puede escribir:

$$P_n = S_n + T_n.$$

1.° Si u_n y v_n convergen, S_n y T_n tienden hacia los límites S y T. Por tanto, P_n tiende hacia $S + T$ y la serie suma p_n converge.

2.° Si u_n converge y si v_n diverge, entonces p_n diverge, pues, si p_n tenía un límite P, T_n admitiría $P - S$ como límite y la serie v_n no divergería.

3.° Queda el caso más ambiguo, donde u_n y v_n son las dos convergentes. No se puede decir nada *a priori* sobre p_n, como lo muestran los dos ejemplos siguientes.

Sean las dos series:

$$u_n = \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad v_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Ellas son ambas divergentes, puesto que $v_n \sim -\frac{1}{n}$ y la suma

$$p_n = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

equivale a $-\frac{1}{2n^2}$, aunque p_n es convergente.

Por el contrario, la suma

$$q_n = u_n + (-v_n)$$

equivale a $\frac{2}{n}$ y es, por tanto, divergente.

II. MULTIPLICACION DE DOS SERIES

Definamos en principio la *serie producto* de dos series u_n y v_n, poniendo para su término general:

$$w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + u_2 v_{n-2} + \dots + u_{n-1} v_1 + u_n v_0.$$

Demostremos ahora el *teorema general de F. Mertens.*

Si la serie u_n es convergente (semiconvergente) *y la serie v_n absolutamente convergente, la serie producto es convergente.*

Designemos por s_n, t_n y p_n, respectivamente, las sumas parciales de las series u_n, v_n y w_n.

1.° La demostración se basa en la evaluación de la diferencia:

$$p_{2n} - s_n t_n = \sum_{i,j} u_i v_j.$$

Se observa que en esta diferencia sólo quedan los productos $u_i v_j$, para los cuales una de las i o j es superior a n, siendo su suma $i + j$ inferior o igual a 2_n. De donde:

[19] $$P_{2n} - s_n t_n = v_0(u_{n+1} + \dots + u_{2n}) + v_1(u_{n+1} + \dots + u_{2n-1}) + \dots + v_{n-1} u_{n+1} + v_{n+1}(u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}) + v_{n+2}(u_0 + \dots + u_{n-2}) + \dots + v_{2n} u_0.$$

Como la serie u_n converge, las sumas $u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_m$ para todo $m > n$ son en módulo inferiores a ε positivo, dado, cualquiera, para n suficientemente grande, mientras que las sumas S_n son todas mayoradas por la misma razón. Sea M este mayorante. Se deduce entonces que de [19]:

[20] $$|p_{2n} - s_n t_n| \leqslant \varepsilon(|v_0| + |v_1| + \dots + |v_{n-1}|) + \mathrm{M}(|v_{n+1}| + \dots + |v_{2n}|).$$

La serie v_n es, pues, absolutamente convergente. El primer paréntesis de [20] es mayorado por la suma K de la serie $|v_n|$ mientras que el segundo paréntesis tiende hacia cero y puede ser hecho inferior a todo ε' positivo, de tal suerte que se puede escribir [20] bajo la forma:

[21] $$|p_{2n} - s_n t_n| \leqslant \varepsilon \mathrm{K} + \mathrm{M}\varepsilon'$$

que muestra que p_{2n} tiende hacia st, límite de $s_n t_n$.

2.° Para concluir la demostración del teorema de F. Mertens basta probar que p_{2n-1} tiene el mismo límite que p_{2n} y, por tanto, que w_{2n} tiende hacia cero, puesto que:

$$p_{2n} = w_{2n} + p_{2n-1},$$

pero se obtiene a partir de la definición de w_{2n}:

$$|w_{2n}| \leqslant |v_0||u_{2n}| + \ldots + |v_{n-1}||u_{n+1}| \\ + |v_n||u_n| + \ldots + |v_{2n}||u_0|$$

y, como se puede elegir n tal que $|u_n| < \varepsilon$ para todo ε positivo, puesto que u_n tiende hacia cero, se puede escribir:

$$|w_{2n}| < \varepsilon(|v_0| + \ldots + |v_{n-1}|) \\ + M(|v_n| + \ldots + |v_{2n}|) < \varepsilon K + \varepsilon' M$$

como precedentemente, y el teorema de F. Mertens queda demostrado.

3.° Este teorema es, en particular, válido *si las dos series son absolutamente convergentes* y, en consecuencia, si las dos series son de *términos positivos*.

III. FORMULA DE EULER

Designamos por p_m el número primero de rango m en la serie creciente de los números primeros y desarrollamos $\frac{1}{1 - p_m^{-\alpha}}$ donde $\alpha > 1$ en serie geométrica. Obtenemos así:

$$\frac{1}{1 - 2^{-\alpha}} = 1 + 2^{-\alpha} + 2^{-2\alpha} + \ldots + 2^{-n\alpha} + \ldots$$

$$\frac{1}{1 - 3^{-\alpha}} = 1 + 3^{-\alpha} + 3^{-2\alpha} + \ldots + 3^{-n\alpha} + \ldots$$

....

$$\frac{1}{1 - p_m^{-\alpha}} = 1 + p_m^{-\alpha} + p_m^{-2\alpha} + \ldots + p_m^{-n\alpha} + \ldots$$

Efectuando el producto miembro a miembro se obtiene, puesto que todas las series del segundo miembro son convergentes:

$$\prod_{m=1}^{m=m} (1 - p_a^{-\alpha})^{-1} = 1 + \Sigma p_1^{-\alpha_1} p_2^{-\alpha_2} p_3^{-\alpha_3} \ldots p_m^{-\alpha_m}$$

siendo $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m$ los productos de α por enteros.

Como los productos $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \ldots p_m^{\alpha_m}$ son todos obtenidos una vez y una sola cuando m aumenta indefinidamente, el segundo miembro de esta igualdad posee un límite cuando m tiende hacia infinito, límite que no es otro que la suma $\zeta(\alpha)$ de la serie de Riemann. Desde luego, el producto al primer miembro tiene también un límite, y se puede escribir la fórmula de Euler.

$$\prod_{m=1}^{m=+\infty} (1 - p_m^{-\alpha})^{-1} = \zeta(\alpha).$$

El caso $\alpha = 1$ nos da un resultado interesante, puesto que el método precedente se extiende con facilidad, pero siendo $\zeta(1)$ infinito, el producto

$$\prod_{m=1}^{m=+\infty} (1 - p_m^{-1})^{-1}$$

tiende hacia infinito, luego también su logaritmo. Pongamos:

$$u_m = -\ln\left(1 - \frac{1}{p_m}\right) \sim \frac{1}{p_m}.$$

Como la serie u_m diverge, la serie $\frac{1}{p_m}$ diverge, es decir, que *la serie de los inversos de los números primeros diverge.*

Este resultado puede sorprender, pues los números primeros son cada vez más raros en la serie creciente de los enteros y podría pensarse entonces que, cuando se les conserva solos, se han quitado suficientes términos de la serie armónica para que llegue a ser convergente. Se ve que no es así. Por el contrario, si se escriben todos los enteros en el sistema decimal y se retira de la serie armónica solamente los términos cuyo denominador contiene al menos un 5, se obtiene una serie convergente y se puede mostrar incluso que su suma es inferior a 80. La demostración utiliza la descomposición de las sumas parciales en ramas de términos comprendidos entre dos múltiplos de 10 sucesivos.

Estos ejemplos evidencian la necesidad de demostraciones rigurosas cuando se quiere estudiar la naturaleza de una serie.

CAPITULO V

CONVERGENCIA UNIFORME

El estudio de las series enteras, y, más generalmente, de las series de funciones, necesita la noción de convergencia uniforme. Haremos una larga introducción utilizando las definiciones que la topología asocia a los espacios de funciones.

I. ESPACIO VECTORIAL

Recordemos brevemente, habiendo llegado esta noción a ser muy clásica, que un conjunto de elementos E está dotado de una estructura de espacio vectorial (e. v.) si existe un grupo aditivo conmutativo interno y una ley de composición externa multiplicando los elementos E por los elementos de un cuerpo **K**, siendo estas dos operaciones distributivas la una por relación a la otra. Denominaremos entonces «vectores» a los elementos de un tal conjunto y los designaremos a menudo por una letra a la que está superpuesta una flecha. Los axiomas de estructura son, pues, estos:

1.° De un grupo aditivo conmutativo, el elemento neutro es denotado $\vec{0}$.

2.° De una ley externa tal que:

$$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$$

para todo $\lambda \in \mathbf{K}$ y para todos $\vec{a}, \vec{b} \in E$,

$$(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$$

para todo $\vec{a} \in E$ y para todos $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$,

$$(\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a})$$

para todo $\vec{a} \in E$ y para todos $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$,

existe un elemento neutro para la multiplicación externa.

De una manera más restrictiva, se dirá que E es un espacio vectorial de dimensión n, si existe en E un conjunto al menos de n, y solamente n, *vectores libres* (n, entero), es decir tales que la igualdad:

$$\lambda_1\vec{e_1} + \lambda_2\vec{e_2} + \ldots + \lambda_n\vec{e_n} = \vec{0}$$

implica $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Estos n vectores libres se dice que forman una *base* y la combinación lineal:

$$\vec{e} = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \vec{e_i}$$

representa una vez y una sola todos los elementos de E.

Se recurrirá a los axiomas generales de definición sobre todo cuando la dimensión de e. v. es infinita, es decir, cuando el número de los vectores es tan grande como se quiere.

Así, por ejemplo, el conjunto de las series numéricas, sobre **R** o sobre **C**, que son convergentes, es un e. v. sobre **R** o sobre **C**, pues si u_n y v_n convergen $u_n + v_n$ convergen; así que λu_n para λ pertenecen a **R** o **C**, pero, por el contrario, el conjunto de las series numéricas divergentes no es un espacio vectorial, pues la suma de dos series divergentes puede, como se ha visto, converger.

Este espacio de series convergentes es de dimensión infinita.

Las combinaciones lineales $\sum_{i=1}^{i=p} \lambda_i \vec{e_i}$ de p vectores de un e. v. de dimensión n ($p < n$) engendran un subespacio vectorial (s. e. v.) de E, sea n finito o no. Se dirá que k s. e. v. de E, notados $E_1, E_2, \ldots, E_k$, están en *suma directa* sobre E si, y solamente si, todo vector $\vec{x}$ de E se descompone de una manera única siguiente:

$$\vec{x} = \vec{x_1} + \vec{x_2} + \ldots + \vec{x_k}$$

donde $\vec{x_1} \in E_1, \vec{x_2} \in E_2, \ldots, \vec{x_k} \in E_k$.

Así, los s. e. v. de una dimensión engendrados por los vectores de base $\vec{e_i}$ (llamados entonces derecha vectorial $\vec{e_i}$) del espacio vectorial E son en suma directa sobre E, y esta noción de espacios vectoriales en suma directa generaliza así la noción de vectores independientes.

II. NORMA

1.° Una norma es definida sobre un espacio vectorial E si, y solamente si, a todo elemento $\vec{a}$ de E se puede asociar un número positivo o nulo notado:

$$\|\vec{a}\|$$

y tal que:

a) $\|\vec{a}\| = 0$ implica $\vec{a} = \vec{0}$, y recíprocamente;

b) $\|\vec{a} + \vec{b}\| \leqslant \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$, para todos $\vec{a}, \vec{b} \in E$;

c) $\|\lambda\vec{a}\| = |\lambda|\,\|\vec{a}\|\ \forall\, \lambda \in \mathbf{R}$ y para todo $\vec{a} \in E$.

Se supondrá E definido sobre los reales y se dirá que E provisto de su norma es un espacio vectorial normado real o, más brevemente, un *espacio normado.*

2.° Se obtienen ejemplos de norma descomponiendo $\vec{x}$ sobre una base:

$$\vec{x} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + \dots + x_n\vec{e_n} \quad (x_i \in \mathbf{R})$$

y poniendo:

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

Se verifica que los axiomas de definición de la norma quedan bien satisfechos. Esta norma es llamada euclidiana, pues es invariante en una rotación de la base ortonormada.

Pero, para todo $\vec{x}$ de E, se puede poner:

$$\|\vec{x}\| = \sup|x_i| \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

que tiene también todas las propiedades de una norma.

Esta última norma no es invariante en todo cambio de base y hay, pues, tantas normas de este tipo como las hay de bases, pero esta circunstancia es de poca importancia, ya que todas estas normas son equivalentes.

3.° *Normas equivalentes.*—Se dice que dos normas sobre E, denotadas ν y ν', son equivalentes si, y solamente si, existen a y b positivos tales que:

$$a\nu(\vec{x}) \leqslant \nu'(\vec{x}) \leqslant b\nu(\vec{x}), \quad \text{para todo } \vec{x} \in E.$$

A dos normas equivalentes está asociada la misma topología. De una manera más precisa, nosotros demostraremos el resultado siguiente, que es esencial:

Toda sucesión de Cauchy que converge siguiendo la norma ν converge siguiendo una norma equivalente ν'.

Sea x_n una sucesión de Cauchy, convergente siguiendo la norma ν, lo cual significa que existe un entero N tal que, para todo $p, q > N$ y para todo ε positivo, se puede escribir:

$$\nu(x_p - x_q) < \varepsilon.$$

Ahora bien, $\nu'(x_p - x_q) \leqslant b\nu(x_p - x_q) \leqslant b\varepsilon$, lo que demuestra la proposición.

Dos normas equivalentes implican, pues, la misma noción de límite. Pero si el espacio vectorial E es de dimensión finita sobre $\mathbf{R}$, se demuestra que todas las normas son equivalentes y, por tanto, en particular asociadas a la misma noción de límite. Así, la noción de convergencia de una sucesión de Cauchy (es decir, satisfaciendo a la condición de Cauchy) en un espacio normado es independiente de la elección de la norma cuando la dimensión de e. v. es finita, pero toda sucesión de Cauchy no converge necesariamente en un espacio normado, y se dice que *el espacio normado es completo cuando toda sucesión de Cauchy converge en él.* Entonces es un *espacio de Banach.*

Así, un e. v. normado E sobre $\mathbf{Q}$ no es completo, pues la sucesión vectorial:

$$\left(1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!}\right)\vec{e_1} +$$
$$\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)\vec{e_2}$$

por ejemplo, que tiende hacia $e\vec{e_1} + (\ln 2)\,\vec{e_2}$ (siendo e el número de Neper), no tiene límite en E. Por el contrario,

un e. v. de dimensión finita normado sobre **R** o **C** es completo. En efecto, si $x \in \mathbf{R}$, $|x|$ es una norma, como es fácil de ver, y si $x \in \mathbf{C}$, el módulo de x, notado $|x|$, es también una norma, pero se sabe que **R**, y, por tanto, **C**, es completo, contrariamente a **Q**.

III. ESPACIOS METRICOS

Se nota $d(x, y)$ la *distancia* de dos elementos x e y de E. Una distancia debe verificar las propiedades siguientes donde d es un número real positivo.

a) Si $x = y$, entonces $d(x, y) = 0$, y recíprocamente.
b) $d(x, y) = d(y, x)$.
c) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$.

Esta última desigualdad, denominada triangular, traduce el hecho de que en el espacio euclidiano de la geometría ordinaria el lado de un triángulo es inferior a la suma de los otros dos lados.

A toda norma ν se asocia una distancia poniendo:

$$d(x, y) = \nu(x - y).$$

Se verifica:

a) pues si $x = y$, $\nu(0) = 0$, y recíprocamente;
b) pues $\nu(x - y) = \nu(y - x)$;
c) pues $\nu(x - y) \leqslant \nu(x - z) + \nu(z - y)$.

Un espacio vectorial provisto de una distancia es llamado *espacio métrico*. Un espacio métrico en el cual toda sucesión de Cauchy converge es llamado espacio métrico completo. Notemos que la condición de Cauchy se escribe aquí:

$$d(x_p, x_q) < \varepsilon \quad \forall\, p, q > \mathrm{N} \quad \text{y} \quad \forall\, \varepsilon > 0.$$

Si la distancia es deducida de la norma de un e. v. normado completo, el espacio métrico así asociado es también completo. Estas nociones piden ser aplicadas inmediatamente a las sucesiones de aplicaciones en **R** o en **C**.

IV. CONVERGENCIA UNIFORME

Consideremos sucesiones de funciones de término general $u_n(x)$ definidas sobre un subconjunto E de **R** que será a menudo un segmento $[a, b]$, es decir, aplicaciones f de E en **R**, supuestamente limitadas, y se denotará $\mathcal{F}$ el conjunto de estas aplicaciones.

1.° Sea $x_0 \in$ E, la sucesión de reales $f_n(x_0)$ converge si, y solamente si, existe $f \in \mathcal{F}$ tal que:

$$d[f_n(x_0), f(x_0)] < \varepsilon.$$

Pero esta convergencia simple no conserva necesariamente la continuidad. Sea, por ejemplo, la sucesión:

$$[22] \qquad u_n(x) = \frac{n \operatorname{sen} x}{1 + nx} \quad \text{sobre } [0, 1].$$

Esta es una sucesión de funciones de x que, para n fijado, son continuas sobre el segmento $[0, 1]$. Ahora bien, $u_n(0) = 0$ tiende entonces hacia 0, mientras que $u_n(x)$, si $x \neq 0$, tien-

de hacia $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$. Así, el límite $f(x)$, igual a 0 si $x = 0$ y a $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ si $x \neq 0$, no es continuo en el origen, puesto que $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ tiende hacia 1 cuando x tiende hacia 0.

Es, pues, necesario introducir una condición más restrictiva de convergencia que se obtendrá considerando el conjunto $\mathscr{F}$.

2.° El conjunto $\mathscr{F}$ de las aplicaciones limitadas a una estructura de e. v. En efecto, el conjunto de las funciones numéricas de E en $\mathbb{R}$ es un e. v. y, según el teorema del subespacio, basta probar que la suma de dos aplicaciones f de $\mathscr{F}$ pertenecen a $\mathscr{F}$ y que la aplicación λf pertenece a $\mathscr{F}$, lo que se hace sin dificultad, puesto que la propiedad de ser limitado se conserva en estas dos operaciones.

3.° Es natural introducir una norma sobre este e. v. y se pondrá:

[23] $$\| f \| = \sup | f(x) | \quad \forall\ x \in E$$

que verifica los axiomas de definición de las normas, pues:

a) Si $\| f \| = 0$,
$\sup | f(x) | = 0 \Longleftrightarrow f(x) = 0 \quad \forall\, x \in E.$

b) $\| f + g \| = \sup | f(x) + g(x) |$
$\leqslant \sup | f(x) | + \sup | g(x) |, \quad \forall\, x \in E.$

c) $\| \lambda f \| = \sup | \lambda f(x) | = | \lambda | \sup | f(x) |$
$= | \lambda | \, \| f \|, \quad \forall\, x \in E.$

4.° Si se provee $\mathscr{F}$ de la métrica deducida de la norma, entonces definida por:

$$d(f, g) = \| f - g \|,$$

siendo f y g dos elementos de $\mathscr{F}$, la sucesión $f_n(x)$, donde el dominio de n es el conjunto de los enteros positivos, será dicho que *converge uniformemente* sobre E hacia una función f de $\mathscr{F}$ si, y solamente si:

[24] $$d(f_n, f) \to 0$$

cuando n tiende a infinito, lo que se escribe de una manera equivalente:

$$\sup | f_n - f | \to 0 \quad \text{si} \quad n \to +\infty.$$

Y resulta que existe $N > 0$ tal que:

[25] $$| f_n(x) - f(x) | < \varepsilon \quad \forall\, x \in E \quad \text{y} \quad \forall\, n > N.$$

Recíprocamente, si [25] está satisfecho en estas condiciones, se puede escribir:

$$\sup | f_n(x) - f(x) | < \varepsilon.$$

Entonces f y f_n están limitadas sobre E y pertenecen a $\mathscr{F}$ y la definición [24] de la convergencia uniforme es satisfecha.

Las definiciones [24] y [25] son, pues, equivalentes y pueden servir tanto la una como la otra para definir la convergencia uniforme, y la norma [23] es llamada *norma de la convergencia uniforme*.

5.° Sea, por ejemplo, la sucesión:

[26] $$u_n(x) = n^2 \operatorname{sen}^n x \cos x \quad \text{sobre} \left[0, \frac{1}{2}\pi\right].$$

Si $x = 0$, $u_n(0) = 0$.

Si $x = \dfrac{1}{2}\pi$, $u_n\left(\dfrac{1}{2}\pi\right) = 0$.

Si $x \neq 0, \dfrac{1}{2}\pi$, $u_n(x) \to 0$.

Hay, pues, convergencia y

$$u_n(x) \to f(x) = 0, \quad \forall\, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

pero ¿es uniforme la convergencia?

Para responder a esta cuestión, se puede utilizar [24] y buscar sobre $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ $\sup |f_n(x)|$. Como $|f_n(x)| = f_n(x)$, se forma la derivada:

$$f'_n(x) = -n^2 \operatorname{sen}^{n+1} x + n^3 \cos^2 x \operatorname{sen}^{n-1} x.$$

La condición $f'_n(x) = 0$ provee $\operatorname{tg}^2 x = n$ y $x = \operatorname{Arc\,tg} \sqrt{n}$, de donde para el máximo M_n:

$$M_n = \frac{n^2}{\sqrt{1+n}}\left(\frac{n}{1+n}\right)^{\frac{1}{2}n} \sim \frac{1}{\sqrt{e}}\, n^{\frac{3}{2}}$$

que tiende hacia infinito con n, y resulta que $\sup |f_n(x)|$ no tiene límite cuando n tiende hacia infinito y que, por consecuencia, la convergencia no es uniforme.

V. CONTINUIDAD

La convergencia uniforme conserva la continuidad, es decir, que si $f(x)$ es continua al punto x_0 del segmento $[a, b]$ y converge uniformemente sobre $[a, b]$ hacia $f(x)$, este límite $f(x)$ es continuo al punto x_0.

En efecto:

$$f(x) - f(x_0) = f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)$$

de donde:

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|.$$

Como la convergencia es uniforme, existe N, para todo $x \in [a, b]$, tal que para todo $n > N$:

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{y} \quad |f_n(x_0) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Fijemos ahora n tomando $n = N + 1$, de modo que por consecuencia las dos últimas desigualdades sean verificadas. Entonces, siendo continua en el punto x_0 la función $f_n(x)$, existe α tal que:

$$|x - x_0| < \alpha \Longrightarrow |f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Luego, poniendo $|x - x_0| < \alpha$, es cierto que:

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

lo que implica la continuidad de $f(x)$ en el punto $x = x_0$ y demuestra la proposición.

Es así que la sucesión [22] no converge, pues, uniformemente sobre [0, 1], puesto que la continuidad no es conservada en el límite, y aquí todavía la propiedad ha sido utilizada negativamente.

Por el contrario, si consideramos la sucesión [26] vemos que la continuidad es conservada en el límite, pero que no hay convergencia uniforme: el hecho de que la continuidad está conservada es una condición necesaria, pero no suficiente, de convergencia uniforme.

VI. TEOREMA DE DINI

Este teorema nos da una condición suficiente, pero no necesaria, para que, siendo conservada la continuidad en el límite, la convergencia sea uniforme. Esta condición es el decrecimiento de la sucesión:

$$h_n(x) = |f_n(x) - f(x)|.$$

De la continuidad de $f_n(x)$ y de $f(x)$ resulta que $h_n(x)$ es continua para todo n fijado. Para $x = x_0$ existe, pues, $N(x_0)$ tal que:

$$h_N(x_0) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{para todo } \varepsilon \text{ positivo},$$

puesto que $f_n(x_0)$ tiende hacia $f(x_0)$ según la convergencia simple de la hipótesis, pero, como $h_N(x)$ es continua, existe también $\alpha(N)$ tal que $|x - x_0| < \alpha(N)$ implica $|h_N(x) - h_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$, y en definitiva:

$$h_N(x) < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

Interviene aquí la hipótesis de que la sucesión $h_n(x)$ es decreciente, puesto que esta circunstancia permite escribir:

$$h_n(x) < h_N(x) < \varepsilon$$

para todo $n > N$ y para todo $x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$, intervalo abierto que nosotros designaremos por I.

Ahora bien, según el teorema de Borel-Lebesgue, basta un número finito de intervalos I para recubrir el segmento $[a, b]$, y a este número finito de I le corresponde, por tanto, un número finito de N(I). Basta elegir:

$$N = \sup N(I)$$

para demostrar la convergencia uniforme.

Sea, por ejemplo, demostrar la convergencia uniforme de la sucesión:

[27] $$u_n(x) = n \operatorname{sh} \frac{x}{n} \text{ sobre } [0, 1]$$

que tiende hacia x para n infinito (convergencia simple para todo x fijado). Formemos $h_n(x) = n \operatorname{sh} \frac{x}{n} - x$ y pongamos:

$$h(u) = u \operatorname{sh} \frac{x}{u} - x.$$

Calculemos

$$h'(u) = \operatorname{sh} \frac{x}{u} - \frac{x}{u} \operatorname{ch} \frac{x}{u}.$$

Esta derivada es negativa para $\frac{x}{u}$ positivo, pues esta condición se escribe:

$$v = \operatorname{th} \frac{x}{u} - \frac{x}{u} = \operatorname{th} X - X < 0$$

que es verificada si $v'_X = 1 - \operatorname{th}^2 X - 1 = -\operatorname{th}^2 X$, poniendo $\frac{x}{u} = X$, lo que muestra que $v(X)$ es una función decreciente, nula en el origen y constantemente negativa. Las condiciones de aplicación del teorema de Dini son satisfechas y la convergencia es así uniforme.

VII. INTEGRACION

Una propiedad importante de las sucesiones $f_n(x)$ integrables y convergiendo uniformemente sobre $[a, b]$ hacia $f(x)$ consiste en el hecho de que la sucesión $g_n(x)$ es obtenida integrando $f_n(x)$ sobre $[a, x]$ y, por consecuencia, tal que:

$$g_n(x) = \int_a^x f_n(x)\,dx,$$

admite para límite la integral sobre $[a, x]$ del límite $f(x)$, lo que se escribe $\forall\, x \in [a, b]$:

$$\lim_{n=+\infty} \int_a^x f_n(x)\,dx = \int_a^x \lim f_n(x)\,dx.$$

Esta es la propiedad de «interversión» de los símbolos de integración y de paso al límite, «interversión» que no puede operarse más que bajo ciertas condiciones. La demostración de esta propiedad no supone dificultades particulares, sólo recurre a la definición precisa de la integral de Riemann, que es utilizada aquí.

Apliquemos este resultado a la sucesión [26], puesto que:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} u_n(x)\,dx = n^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n x \cos x\,dx = \left[\frac{n^2 \operatorname{sen}^{n+1} x}{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{n^2}{n+1}.$$

El teorema precedente no es verificado, puesto que:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = 0,$$

pues el límite $f(x)$ es nulo sobre $\left[0, \frac{1}{2}\pi\right]$. Por tanto, que la sucesión $u_n(x)$ no converge uniformemente, como se ha visto.

VIII. DERIVACION

Existe un teorema análogo concerniente a la derivación de una serie de funciones, pero los dos enunciados no son de hecho similares en todo. Se demuestra, en efecto, la proposición siguiente:

Si $f_n(x)$ es una sucesión de funciones continuas y derivables sobre $[a, b]$ que converge para un punto $c \in [a, b]$ y si la sucesión $f'_n(x)$ es continua y uniformemente convergente sobre $[a, b]$ hacia $g(x)$, la sucesión $f_n(x)$ converge uniformemente hacia $f(x)$, derivable sobre $[a, b]$ y tal que:

$$g(x) = f'(x)$$

sobre todo el segmento $[a, b]$, es decir $\forall\, x \in [a, b]$.

La demostración utiliza el teorema precedente sobre la integración aplicándolo a la sucesión $f'_n(x)$, que verifica todas las condiciones.

IX. CRITERIO DE WEIERSTRASS. APLICACION A LAS SERIES

Una importante condición de convergencia uniforme es a menudo utilizada para las series:

Se dice que una *serie de término general* $u_n(x)$ *converge uniformemente sobre* $[a, b]$ *si, y solamente si, la sucesión de las sumas parciales converge uniformemente sobre* $[a, b]$.

En consecuencia, resulta de los teoremas precedentes que si $u_n(x)$ es continua sobre $[a, b]$ y si la serie $u_n(x)$ converge uniformemente, entonces la suma $S(x)$ de la serie, lí-

mite de las sumas parciales continuas $S_n(x)$, es ella misma continua.

La regla de Weierstrass afirma que, si a partir de un cierto rango:

$$|u_n(x)| \leqslant v_n,$$

siendo v_n el término general de una *serie numérica convergente,* entonces la serie $u_n(x)$ converge uniformemente (y absolutamente).

En efecto, el resto $R_n^m = u_{n+1}(x) + \ldots + u_m(x)$ es mayorado por:

[28] $$|R_n^m| \leqslant |u_{n+1}(x)| + \ldots + |u_m(x)| \leqslant v_{n+1} + \ldots + v_m$$

es decir, por el resto r_n^m de una serie positiva convergente. Este resto R_n^m tiende, pues, hacia 0, lo que prueba la convergencia; la convergencia absoluta resulta de que el resto de la serie de los valores absolutos tiende también hacia cero según [28].

Nosotros utilizaremos sistemáticamente esta regla de Weierstrass o regla de la serie mayorante para el estudio de las series enteras en el capítulo siguiente.

Mostremos todavía que la regla puede servir para probar simplemente la convergencia uniforme de la sucesión [27]:

$$u_n(x) = n \operatorname{sh} \frac{x}{n},$$

pues basta asociarle la serie:

$$w_n(x) = -u_n(x) + u_{n-1}(x).$$

Calculando la derivada:

$$w'_n(x) = -\operatorname{ch} \frac{x}{n} + \operatorname{ch} \frac{x}{n-1}$$

que es positiva, se deduce que $w_n(x)$ es creciente y, por tanto, positiva y mayorada por:

$$(n-1) \operatorname{sh} \frac{1}{n-1} - n \operatorname{sh} \frac{1}{n},$$

serie numérica convergente por equivalente a $\frac{1}{3n^3}$, lo que asegura la convergencia de la serie $w_n(x)$ y, por consecuencia, el límite uniforme de la sucesión $u_n(x)$.

CAPITULO VI

SERIES DE POTENCIAS

Las series de potencias o *series enteras* son las series de término general:

[29] $$u_n(x) = a_n x^n$$

donde n, entero, varía de 0 a $+\infty$, perteneciendo a_n y x a **R** o a **C**.

I. ALGEBRA DE LAS SERIES DE POTENCIAS

Se considera en principio estas series sin cuidado de su convergencia. Se dice entonces que [29] es una *serie formal* y se verifica que el conjunto (E) de las series [29] es un *anillo conmutativo unitario sin divisor de cero,* siendo definida la ley de igualdad si $v_n = b_n x^n$ para:

$$u_n = v_n \Longleftrightarrow a_n = b_n \text{ para todo } n.$$

1.° $u_n + v_n = (a_n + b_n) x^n$ y existe un grupo aditivo abeliano, siendo el elemento neutro $a_n = 0$ para todo n.

2.° La serie producto de dos series u_n y v_n tiene por término general $w_n = c_n x^n$ con:

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0 = \sum_{k=0}^{k=n} a_k b_{n-k}.$$

La ley de multiplicación es, pues, interna, conmutativa y distributiva por relación a la adición. Existe un elemento neutro obtenido tomando $a_0 = 1$ y $a_n = 0$ para todo n positivo. En fin, no hay divisores de cero, pues si $a_p x^p$ y $b_q x^q$ son los términos de más bajo grado, no nulos, de las series u_n y v_n, el producto de estas series comprendería el término:

$$a_p b_q x^{p+q}$$

que no sería nulo contrariamente a la hipótesis.

3.° Toda serie de (E) no admite necesariamente un inverso, pero la condición $a_0 \neq 0$ es necesaria y suficiente para que el inverso exista, pues la igualdad:

$$1 = (a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots)(b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n + \dots)$$

implica:

$$1 = a_0 b_0$$
$$0 = a_1 b_0 + a_0 b_1$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$0 = a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \dots + a_0 b_n$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

La primera ecuación da $b_0 = \dfrac{1}{a_0}$ si $a_0 \neq 0$ y es imposible si $a_0 = 0$.

Siempre con la condición $a_0 \neq 0$, la segunda ecuación da b_1, la tercera da b_2 y así sucesivamente, existiendo el inverso de manera única.

II. DISCO DE CONVERGENCIA

Estudiamos ahora el dominio del plano complejo, en el cual la serie:

$$a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots$$

converge. Para esto demostremos en principio el lema siguiente:

Si L *es el límite superior de una sucesión* b_n *positiva y si* $l \neq 0$ *es el límite ordinario de una sucesión* c_n *positiva, entonces la sucesión* $b_n c_n$ *tiene* Ll *para límite superior.*

a) Si $L = +\infty$, se sabe que $b_n > M$, cualquiera que sea $M > 0$ para una infinidad de $n > N$. Como existe N_1 tal que $c_n > l - \varepsilon > 0$ para todo n superior a N_1, se tiene:

$$b_n c_n > M(l - \varepsilon)$$

para una infinidad de $n > N, N_1$.

Luego $\limsup_{n=+\infty} b_n c_n = Ll = +\infty$, puesto que $l \neq 0$.

b) Si L es finito, se tiene, para todo $n > N$, $b_n < L + \varepsilon$ y, para todo n superior a N_1, $c_n < l + \varepsilon$.

Luego, para todo $n > N, N_1$, se tiene:

$$b_n c_n < Ll + \varepsilon(L + l + \varepsilon).$$

Si ε' es positivo cualquiera, existe N_2 tal que:

$$b_n c_n < Ll + \varepsilon \text{ para } n > N_2$$

tomando ε de modo que:

$$\varepsilon(L + l + \varepsilon) < \varepsilon',$$

lo que es siempre posible.

Igualmente, para una infinidad de $n > N$, se tiene:

$$b_n > L - \varepsilon,$$

y para todo $n > N_1$:

$$c_n > l - \varepsilon > 0,$$

luego:

$$b_n c_n > Ll - \varepsilon(L + l - \varepsilon),$$

es decir:

$$b_n c_n > Ll - \varepsilon' \quad \text{si} \quad \varepsilon(L + l - \varepsilon) < \varepsilon',$$

lo que es verificado. En consecuencia:

$$\limsup_{n=+\infty} b_n c_n = Ll = \limsup_{n=+\infty} b_n \times \lim_{n=+\infty} c_n.$$

Nosotros podemos ahora demostrar el teorema que establece la existencia para toda serie entera de un disco de convergencia absoluta, centrado al origen:

Si $L = \limsup_{n=+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, *la serie* $a_n x^n$ *converge absolutamente al interior del disco centrado al origen de radio* $R = \frac{1}{L}$ *y diverge al exterior.*

Si $L = +\infty$, la serie no converge sino para $x = 0$ ($R = 0$).

Si $L = 0$, la serie converge en todo el plano ($R = +\infty$). En efecto, según el lema,

$$\limsup_{n=+\infty} \sqrt[n]{|a_n|\,|x|^n} = L\,|x|, \text{ si } x \neq 0,$$

de donde los resultados aplicando el criterio de Cauchy, puesto que la serie converge para $x = 0$. Sobre el círculo de convergencia, centrado al origen y de radio R, no se puede decir nada *a priori*.

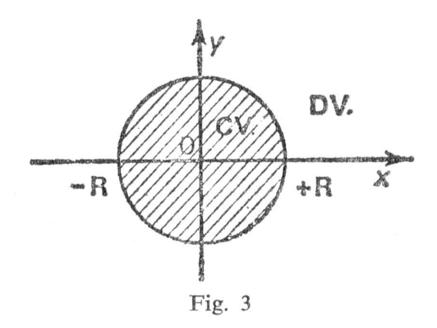


Fig. 3

Prácticamente, en los casos usuales, si $\sqrt[n]{|a_n|}$ tiene un límite, este límite es L, y si $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ tiene un límite, este límite es también el de $\sqrt[n]{|a_n|}$ como se ha visto, es decir, L. Estas dos observaciones permiten, en todos los ejemplos que siguen, determinar el disco de convergencia.

1.º $u_n = n!\,x^n$. Se tiene:

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = (n + 1)\,|x| \to +\infty \text{ para } x \neq 0.$$

La serie diverge para todo salvo al origen.

2.° $u_n = \dfrac{x^n}{n!}$. La serie converge para todo x, pues $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \dfrac{|x|}{n+1}$ tiende hacia cero cuando n tiende hacia infinito.

3.° $u_n = a^n x^n$. Se tiene $\sqrt[n]{|u_n|} = |a||x|$ y $R = \dfrac{1}{|a|}$ si $a \neq 0$.

4.° $u_n = nx^{n-1}$. Se tiene $R = 1$ y si $x = -1$ o $+1$ la serie diverge.

5.° $u_n = \dfrac{x^n}{n}$. Se tiene $R = 1$. Si $x = 1$, la serie diverge y si $x = -1$, converge.

6.° $u_n = \dfrac{x^n}{n^2}$. Se tiene $R = 1$. Si $x = 1$ o si $x = -1$, la serie converge.

Todos los casos son así posibles a los extremos del intervalo de convergencia sobre el eje real.

Haremos una última observación relativa al resultado conocido generalmente con el nombre de *lema de Abel*.

Si una serie entera converge para $x = x_0$, converge para todo x tal que $|x| < |x_0|$. Este resultado es una consecuencia evidente de la forma del dominio de convergencia, que es siempre circular.

III. OPERACIONES SOBRE LAS SERIES ENTERAS

Aplicando los teoremas operatorios ya expuestos, se obtienen inmediatamente los resultados siguientes:

1.° Si $u_n = a_n x^n$ tiene por suma U para $|x| < R$ y si $v_n = b_n x^n$ tiene por suma V para $|x| < R'$, se obtiene que:

$$u_n + v_n = (a_n + b_n)\, x^n \quad \text{si} \quad R \leqslant R'$$

tiene para suma U + V en un disco de radio al menos igual a R.

2.° La serie producto tiene por suma UV para $|x| < R$.

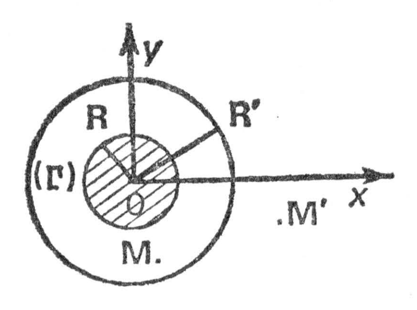


Fig. 4

Si $R < R'$, la serie $u_n + v_n$ no puede converger sino para $|x| < R$. Si, en efecto, $u_n + v_n$ convergieran en un punto M de la corona (Γ) (fig. 4), la suma $(u_n + v_n) - v_n = u_n$ convergería en M, lo que es imposible.

Si, en fin, $u_n + v_n$ convergiera en un punto M′ tal que $OM' > R'$, $u_n + v_n$ debería converger sobre (Γ), puesto que el dominio de convergencia de una serie entera es un disco de centro O.

Por el contrario, si $R = R'$, es posible que $u_n + v_n$ converja sobre un disco abierto de radio más grande que R. Por ejemplo, x^n y $-x^n$ convergen sólo para $|x| < 1$, pero su suma $x^n - x^n = 0$ converge para todo.

IV. CONVERGENCIA UNIFORME

Una serie entera de radio de convergencia R *converge uniformemente sobre todo disco cerrado de radio* $\rho < R$.

En efecto, si $|x| \leqslant \rho < R$, el término general $a_n x^n$ es mayorado en valor absoluto para la serie numérica convergente de término general $|a_n| \rho^n$ y la convergencia es uniforme según la regla de Weierstrass.

La suma $S(x) = \sum_0^{+\infty} a_n x^n$ *es continua sobre todo disco cerrado de radio inferior a* R. Esta es una consecuencia inmediata de la convergencia uniforme.

V. INTEGRACION

Suponemos esencialmente que x recorre el intervalo real $]-R, +R[$. Nosotros vamos a demostrar el teorema siguiente:

Si se integra término a término $S(x) = \sum_0^{+\infty} a_n x^n$, *se obtiene una serie entera que tiene el mismo intervalo de convergencia* $-R, +R$ y, por tanto, la suma es:

$$\int_a^x S(x)\, dx, \text{ para todos } a, x \in]-R, +R[.$$

Según el teorema sobre la integración de las series de funciones demostrado en capítulos precedentes, la serie:

$$v_n = \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$$

converge sobre $]-R, +R[$ hacia la integral $\int_a^x S(x)\, dx$.

Queda por mostrar que el intervalo de convergencia no ha aumentado en la integración. Para esto se puede en principio observar que las series $\frac{v_n}{x}$ y v_n convergen para los mismos x, y seguidamente que:

$$\overline{\lim_{n=+\infty}} \frac{\sqrt[n]{|a_n|}}{\sqrt[n]{n+1}} = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot \lim (n+1)^{-\frac{1}{n}} = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$$

para concluir que v_n converge sobre el mismo intervalo que $a_n x^n$.

Integremos, por ejemplo, la progresión geométrica:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n + \dots \text{ para } |x| < 1.$$

Se obtiene:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + \dots \text{ para } |x| < 1.$$

Para $x = 1$ nosotros sabemos que la serie alternada converge al segundo miembro.

Vamos a demostrar un resultado general debido a Abel:

Si una serie entera converge en el disco de radio R *y para* $x = R$, *ella converge uniformemente para todo segmento* $[a, R]$ donde $a \in]-R, +R[$.

Podemos, en principio, poner $x = \mathrm{R}\mathrm{X}$, de tal suerte que la serie $u_n = a_n x^n$ se transforma en:

$$u_n = a_n \mathrm{R}^n \mathrm{X}^n = b_n \mathrm{X}^n$$

con un radio de convergencia igual a 1. Además, esta serie converge por hipótesis para $\mathrm{X} = 1$, de tal modo que el resto:

$$\mathrm{R}_n^m = b_{n+1} + b_{n+2} + \dots + b_m$$

es inferior en módulo a ε positivo cualquiera para todos n, m superiores a un entero $\mathrm{N}(\varepsilon)$ conveniente.

Apliquemos la transformación de Abel (cap. III) al resto r_n^m de la serie $u_n = b_n \mathrm{X}^n$. Se obtiene:

$$|r_n^m| \leqslant \varepsilon(|\mathrm{X}^n - \mathrm{X}^{n+1}| + |\mathrm{X}^{n+1} - \mathrm{X}^{n+2}| + \dots + |\mathrm{X}^{m-1} - \mathrm{X}^m|) + \varepsilon \mathrm{X}^m$$

Como X está comprendido entre 0 y 1, todas las diferencias son positivas, o nulas si $\mathrm{X} = 1$, y, en consecuencia:

$$|r_n^m| \leqslant \varepsilon(\mathrm{X}^n - \mathrm{X}^m) + \varepsilon \mathrm{X}^m < \varepsilon \mathrm{X}^n < \varepsilon.$$

Luego el resto es mayorado para todo X positivo e inferior o igual a 1 para ε fijado. Hay convergencia uniforme y se obtiene el teorema:

Si $f(x) = \sum_{0}^{+\infty} a_n x^n$ *para* $|x| < \mathrm{R}$ y si:

1.° la serie $a_n x^n$ converge para $x = \mathrm{R}$;

2.° la suma $f(x)$ de la serie para $|x| < \mathrm{R}$ es continua para $x = \mathrm{R}$,

se puede escribir la igualdad al límite:

[30] $$f(\mathrm{R}) = a_0 + a_1 \mathrm{R} + \dots + a_n \mathrm{R}_n + \dots$$

En efecto, hay, como se acaba de ver, convergencia uniforme sobre [0, R], y, por tanto, continuidad a izquierda de la suma de la serie en R, y la continuidad de la función suma implica, pues, la igualdad.

Como la función armónica alternada converge y $\ln(1+x)$ es continuo para $x = 1$, se encuentra la igualdad ya demostrada por otro método; a saber:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \dots$$

VI. DERIVACION

Si se deriva término a término $\mathrm{S}(x) = \sum_{1}^{+\infty} a_n x^n$, se obtiene una serie entera que converge en $]-\mathrm{R}, +\mathrm{R}[$ y donde la suma es la derivada $\mathrm{S}'(x)$ de $\mathrm{S}(x)$.

Derivando término a término, se obtiene la serie de término general $v_n = n a_n x^{n-1}$ que converge para las mismas x que la serie $v_n x = n a_n x^n$. Ahora bien:

$$\limsup_{n=+\infty} \sqrt[n]{n}\, \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n=+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \mathrm{L}.$$

Luego v_n converge en el disco de radio R hacia una suma $f(x)$.

Según el teorema precedente, la suma $\mathrm{S}(x)$ es la integral de $f(x)$, de donde derivando: $f(x) = \mathrm{S}'(x)$.

VII. DESARROLLO EN SERIE ENTERA

Una función $f(x)$ es desarrollable en serie entera en un círculo de radio R si existe una serie $a_n x^n$ convergente en

este círculo y de suma $f(x)$. Si un tal desarrollo existe, se concibe que será posible construir una tabla numérica de los valores de la función para los x de módulo inferior a R.

Observemos, en principio, que, si un tal desarrollo existe, es único. En efecto, si:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots$$

sabemos que $f(x)$ debe admitir una derivada desarrollable en serie, admitiendo esta derivada en consecuencia igualmente una derivada desarrollable en serie, y así seguidamente. Luego $f(x)$ debe ser indefinidamente derivable con las igualdades:

$$f(0) = a_0,$$
$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \dots + na_n x^{n-1} + \dots$$

y, por tanto:

$$f'(0) = a_1, \quad f''(0) = 2a_2 \dots f^{(n)}(0) = n!\, a_n, \dots$$

Estas igualdades interpretan los coeficientes de desarrollo de $f(x)$ de una manera única.

Además, resulta que una función $f(x)$ sólo puede ser desarrollable en serie entera si la función y sus derivadas de orden cualquiera existen en el origen. Estando supuesta cumplida esta condición necesaria, el desarrollo $f(x)$ es, pues, de la forma:

$$f(0) + xf'(0) + \dots + \frac{x^n f^{(n)}(0)}{n!} + \dots$$

El problema planteado ahora es saber si este desarrollo converge para los x no nulos y si su suma es $f(x)$. Es necesario, por tanto, estudiar la diferencia:

[31] $$f(x) - \left[f(0) + xf'(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0)\right] = R_n(x)$$

y ver para cuáles x esta diferencia tiende hacia 0 cuando n tiende hacia infinito.

La fórmula de Taylor-Maclaurin da una expresión de este resto escribiendo:

[32] $$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) \text{ con } 0 < \theta < 1.$$

Esta fórmula es válida si $f(x)$ admite derivadas continuas al orden n sobre $[a, b]$ y una derivada de orden $n + 1$ sobre $]a, b[$. Supongamos entonces que existen R y M positivos tales que:

[33] $$|f^{(n+1)}(\theta x)| < M \text{ para } |x| < R.$$

Como $\frac{x^n}{n!}$ tiende hacia cero si n tiende hacia infinito, puesto que el término general de una serie convergente, $R_n(x)$ tiende hacia 0 para $|x| < R$ y $f(x)$ admite un desarrollo en serie al interior del disco de radio R.

1. **Desarrollos de sen x, cos x, exp x, sh x, ch x.**—Para sen x y cos x, la condición [33] es evidentemente satisfecha, puesto que estas dos funciones poseen un valor absoluto comprendido, cualquiera que sea x, entre 0 y 1. Aquí el disco de convergencia es extendido a todo el plano y se llama en general *funciones enteras* a las funciones suma de series convergiendo cualquiera que sea x.

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

Por lo mismo, $\exp \theta x < \exp R$ para $|x| < R$ y cualquiera que sea R. De donde:

$$\exp x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad \text{para todo } x.$$

Cambiando x en $-x$, efectuando después la semisuma y la semidiferencia se obtienen los desarrollos de $\operatorname{ch} x$ y $\operatorname{sh} x$ para todo x:

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

2. **Desarrollos de L(1 + x), L(1 — x), Arc tg x, Arg th x.**—Se deriva estas funciones y se desarrolla en serie entera sus derivadas; después se obtiene el desarrollo buscado por integración.

Así, la derivada de L(1 — x) es $\frac{-1}{1-x}$, sea:

$$\frac{-1}{1-x} = -(1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots) \quad \text{para} \quad |x| < 1$$

e integrando:

$$L(1-x) = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots\right)$$

para $|x| < 1$.

Cambiando x en $-x$, se obtiene:

$$L(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \dots \text{ para } |x| < 1.$$

Por lo mismo, como las derivadas de $\operatorname{Arc\,tg} x$ y de $\operatorname{Arg\,th} x$ son, respectivamente, $\frac{1}{1+x^2}$ y $\frac{1}{1-x^2}$ se obtienen por integración.

$$\operatorname{Arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

$$\operatorname{Arg\,th} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

siendo estos dos desarrollos válidos para $|x| < 1$.

Tomando $x = 1$ en el desarrollo de $\operatorname{Arc\,tg} x$ y subrayando que la función Arc tg es continua para $x = 1$, mientras que la serie converge al segundo miembro, según el teorema de Leibniz, se puede escribir utilizando la fórmula [30] de la sección V:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \dots$$

pero la serie converge muy lentamente porque es necesario adicionar quinientos términos para que sea cierto obtener π con un error inferior a 10^{-3}, de tal suerte que se ha buscado obtener $\frac{\pi}{4}$ con las sumas de Arc tg desarrollándose en series más rápidamente convergentes. Una de estas fórmulas, de las más conocidas, se escribe:

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{Arc\,tg} \frac{1}{5} - \operatorname{Arc\,tg} \frac{1}{239}$$

donde los desarrollos convergen mucho más rápidamente.

3. **Desarrollos de fracciones racionales.**—Nosotros podemos aquí suponer que la variable x es compleja. Es ne-

cesario y suficiente para que el desarrollo exista que el origen no sea un polo. Si $a \neq 0$ es un polo sobre **C**, la descomposición de la fracción racional $f(x)$ comprende una suma de términos:

$$[34] \qquad \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2} + \dots + \frac{L}{(x-a)^k}$$

donde A, B, ..., L son números complejos Ahora bien:

$$\frac{-\frac{1}{a}}{1-\frac{x}{a}} = -\frac{1}{a}\left(1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \dots + \frac{x^n}{a^n} + \dots\right)$$

para $|x| < a$. La suma [34] es, pues, desarrollable en serie entera por derivaciones y adiciones a partir del desarrollo precedente. Como toda fracción racional, se descompone en una parte polinomial y una suma de expresiones de la forma [34] su desarrollo en serie entera está asegurado, siempre bajo la condición que el origen no sea un polo, y *en un círculo que tenga por radio el más pequeño de los módulos de sus polos*.

4. **Desarrollo del binomio generalizado.**—Nosotros utilizamos el método de los coeficientes indeterminados y buscamos, en consecuencia, encontrar una serie:

$$[35] \qquad y = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots$$

solución de una ecuación diferencial lineal, siendo x una variable real. Consideremos el binomio generalizado:

$$y = (1 + x)^m$$

donde m es un número real. De $y'_x = m(1 + x)^{m-1}$, se deduce:

$$(1 + x)\, y'_x = my.$$

A partir de [35] se calcula y'_x y sustituyendo en la ecuación diferencial se obtiene la recurrencia:

$$(n + 1)\, a_{n+1} = (m - n)\, a_n$$

que permite el cálculo de a_n, de donde la serie:

$$(1 + x)^m = 1 + mx + \frac{1}{2} m(m-1)\, x^2 + \dots + m(m-1) \dots \frac{m-n+1}{n!} x^n + \dots$$

que converge en el disco de radio 1.

Se verifica que esta serie es la solución de la ecuación diferencial precedente que es igual a 1 para $x = 0$, lo que asegura la identificación de su suma con la función $y(x)$.

5. **Desarrollos de Arc sen x y de Arg sh x.**—Siendo las derivadas de estas dos funciones, respectivamente:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{y} \quad \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

se obtienen sus desarrollos integrando término a término los desarrollos de sus derivadas obtenidas por la fórmula del binomio generalizado:

$$\text{Arc sen } x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2n-1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

$$\text{Arg sh}\, x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \dots$$

$$+ (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2n-1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

desarrollos que convergen para $|x| < 1$, de tal modo que, tomando $x = \frac{1}{2}$ en el primero se obtiene para:

$$\frac{\pi}{6} = \text{Arc sen}\, \frac{1}{2}$$

un desarrollo bastante rápidamente convergente.

VIII. FUNCIONES DE LA VARIABLE COMPLEJA

Los desarrollos en series de potencias:

$$\sum_{0}^{+\infty} a_n z^n$$

convergiendo en un disco de radio R, finito o infinito, permiten definir, si z es complejo, funciones complejas de z (aplicaciones de un disco de **C** en **C**) que son llamadas *funciones enteras* cuando $R = +\infty$ y *funciones analíticas* en general. Como estas funciones son uniformes y derivables se les denomina también *holomorfas* en el disco de convergencia. Su estudio, debido inicialmente a A. Cauchy, ha ocupado después a numerosos matemáticos.

1. **Definiciones de exp z, sh z, ch z.**—Se plantea por definición del exponencial complejo:

$$\exp z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

serie que converge para todo z y que es igual a $\exp x$ para x real.

Si se toma $z = ix$ y se separa al segundo miembro la parte real y la parte imaginaria, lo que está permitiendo según la convergencia absoluta, se obtiene la fórmula:

$$\exp ix = \cos x + i \,\text{sen}\, x.$$

Si ahora z y z' son dos números complejos, se demuestra:

$$(\exp z)(\exp z') = \exp (z + z')$$

aplicando la regla de multiplicación de las series, siendo el término general de la serie producida:

$$\frac{z^n}{n!} + \frac{z^{n-1} z'}{1!(n-1)!} + \dots + \frac{z^{n-p} z'^p}{p!(n-p)!} + \dots + \frac{z'^n}{n!}$$

y, por tanto, igual a:

$$\frac{(z + z')^n}{n!}$$

lo que justifica el resultado. Tomando $z = z'$ y razonando por recurrencia, se obtiene sin dificultad:

$$(\exp z)^n = \exp nz$$

Poniendo $z = x + iy$, se obtienen el módulo $\exp x$ y el argumento y de $\exp z$, puesto que:

[36] $\exp(x + iy) = (\exp x)(\exp iy)$
$= (\exp x)(\cos y + i \operatorname{sen} y).$

En fin, las funciones ch z y sh z están definidas por:

$$\operatorname{ch} z = \frac{1}{2}(\exp z + \exp - z)$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{1}{2}(\exp z - \exp - z)$$

y sus desarrollos en serie son aquellos de la sección VII, donde x es reemplazado por z. Por lo mismo, $\operatorname{th} z = \dfrac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}$.

2. **Definiciones de sen z, cos z, tg z.**—Se define cos z y sen z por los desarrollos en serie de la sección VII y tg z por su relación. Formando $\exp iz$ y $\exp - iz$, se obtienen las fórmulas de Euler:

$$\operatorname{sen} z = \frac{\exp iz - \exp - iz}{2i}$$

$$\cos z = \frac{\exp iz + \exp - iz}{2}$$

que permiten generalizar fácilmente las fórmulas de adición y de multiplicación de funciones circulares para los valores complejos de la variable.

La función $\exp z$ es periódica y de período $2i\pi$, como resulta de la fórmula [36]. Tomando en [36] $x = 0$ e $y = \pi$, se obtiene la fórmula observable:

$$\exp i\pi = -1$$

que pone en relación cuatro números fundamentales del Análisis, el número de Neper, el imaginario i, el número π y la unidad negativa.

Se deduce todavía de las fórmulas de Euler las relaciones:

$$\operatorname{sh} iz = i \operatorname{sen} z \quad \operatorname{ch} iz = \operatorname{ch} z \quad \operatorname{th} iz = i \operatorname{tg} z.$$

3. **Definición de ln z.**—Se puede definir el logaritmo del número $z = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ y notar $\ln z = \alpha + i\beta$ poniendo $z = \exp(\alpha + i\beta)$.

Luego:

$$z = (\exp\alpha)(\cos\beta + i \operatorname{sen}\beta) = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$$

lo que implica:

$$\exp\alpha = \rho \quad \beta = \theta + 2k\pi,$$

de donde: $\ln z = \ln\rho + i(\theta + 2k\pi)$.

Pero esta fórmula define una infinidad de logaritmos y es necesario precisar la determinación, lo que puede hacerse imponiendo a θ las condiciones $0 \leqslant \theta < 2\pi$. Se dice que se ha efectuado una *cortadura* en el plano complejo prohibiendo a la variable z volver alrededor del origen de 2π, puesto que ella no puede cortar la parte positiva del eje $\overrightarrow{Ox}$, lo que uniformiza la función.

Se prefiere a menudo, para evitar la dificultad precedente, definir en el disco de radio 1 la función uniforme $\ln(1 + z)$ por su desarrollo en serie:

$$\ln(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{z^n}{n} + \ldots$$

y se puede mostrar en el disco la equivalencia de las dos definiciones, con una determinación conveniente de $\ln(1+z)$ cuando se utiliza la primera definición.

IX. FUNCIONES DE BESSEL

Nosotros queremos mostrar sobre el ejemplo de la ecuación diferencial de Bessel, que se encuentra en numerosos problemas de mecánica y de física, cómo los desarrollos en serie entera permiten integrar una ecuación diferencial lineal.

Sea la ecuación diferencial:

[36] $$x^2 y''_x + xy'_x + (x^2 - \lambda^2)\, y = 0$$

donde x es real, positivo o nulo.

Pongamos $y = x^\lambda u(x)$, la ecuación [35] se transforma en la ecuación en u:

[37] $$xu''_x + (2\lambda + 1)\, u'_x + xu = 0.$$

Esta ecuación posee generalmente una solución desarrollable en serie entera, como se ve poniéndola en este desarrollo con coeficientes indeterminados. Se obtienen después cálculos y si λ no es un entero negativo:

$$u(x) = 1 - \frac{x^2}{4(\lambda+1)} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(\lambda+1)\ldots(\lambda+n)} + \ldots$$

serie de radio de convergencia infinita.

Se llama *función de Bessel* la función:

$$J_\lambda(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\lambda \left[\frac{1}{\Gamma(\lambda+1)} - \frac{x^2}{4\Gamma(\lambda+2)} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \frac{1}{\Gamma(n+\lambda+1)} + \ldots\right]$$

que es una solución particular de la ecuación [36].

Poniendo $y = x^{-\lambda} u(x)$ se obtiene [37], en la cual λ es cambiada en $-\lambda$; luego $J_{-\gamma}(x)$ es solución de la ecuación [36] de Bessel si λ no es entero positivo.

Como J_λ y $J_{-\lambda}$ son funciones de relación no constante, puesto que esta relación tiende hacia 0 o $+\infty$ si $x \to 0$, se obtiene la solución general de la ecuación de Bessel escribiendo:

$$y = C_1 J_\lambda(x) + C_2 J_{-\lambda}(x)$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias, puesto que la solución general es el elemento de un espacio vectorial a dos dimensiones.

Si λ es un entero positivo, se pone $\lambda = p$ y:

$$J_p(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^p \left[\frac{1}{p!} - \frac{x^2}{4(p+1)!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \frac{1}{(n+p)!} + \ldots\right]$$

y si λ es un entero negativo $-p$ se ve que se puede escribir:

$$J_p(x) = (-1)^p J_{-p}(x).$$

Aquí las dos funciones no son ya más independientes y se utiliza el método general de resolución de las ecua-

ciones lineales de segundo orden cuando se conoce una solución particular, poniendo $y = zJ_p$.

Notemos todavía que sobre el desarrollo dado se verifican las relaciones:

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\ \mathrm{sen}\ x \qquad J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x.$$

En fin, se puede verificar las relaciones:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{J_\lambda}{x^\lambda}\right) = -\frac{J_{\lambda+1}}{x^\lambda} \text{ y } \frac{d}{dx}(x^\lambda J_\lambda) = x^\lambda J_{\lambda-1}.$$

Así, para simples operaciones de derivación se puede calcular, si se conoce J_λ, la serie $J_{\lambda+1}, J_{\lambda+2}, \ldots$ o la serie $J_{\lambda-1}, J_{\lambda-2}, \ldots$

Resulta que, siendo $J_{\frac{1}{2}}$ una función elemental, las funciones $J_{n+\frac{1}{2}}$, donde n es entero, son también funciones elementales.

CAPITULO VII

PRODUCTOS INFINITOS

Los productos infinitos de números reales se estudian considerando sus logaritmos o los logaritmos de sus valores absolutos, lo cual reduce su convergencia a la de las sumas infinitas. El mismo método puede ser utilizado para los productos infinitos de números complejos, cuyas aplicaciones esenciales conciernen a las funciones holomorfas, pero las conclusiones son ahí más particulares.

Se considera una sucesión infinita $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ de números reales o complejos y se pone:

$$p_m = \prod_1^m a_n = a_1 a_2 \ldots a_m \quad (m = 1, 2, \ldots).$$

Si p_m tiende hacia $p \neq 0$ cuando m tiende hacia $+\infty$ se dice que el producto converge en $\mathbf{C}^* = \mathbf{C} - (0)$, conjunto de los números complejos no nulos, y tiene por valor p. Se escribe:

$$p = \prod_1^{+\infty} a_n.$$

Es necesario que a_n tienda hacia 1, pues $p_m \to p$ y $p_{m+1} \to p$ implican:

$$\frac{p_{m+1}}{p_m} \to 1, \text{ puesto que } p \neq 0.$$

Se dice todavía, cuando el límite existe, que la familia de los a_n es *multiplicable* en $\mathbf{C}^*$.

I. CONVERGENCIA SIMPLE

Escribamos a_n bajo la forma $a_n = \exp(b_n + ic_n)$ con $b_n + ic_n$ tendiendo hacia cero cuando n tiende hacia infinito, lo que es siempre posible para una determinación conveniente del logaritmo, puesto que a_n tiende hacia 1. Entonces, de $p_m = \exp \sum_1^m (b_n + ic_n)$, se deduce que p_m *converge* en $\mathbf{C}^*$ si, *y solamente* si, *la serie* $b_n + ic_n$ *converge.*

En efecto, si $p \neq 0$, el logaritmo de $|p_m|$ tiene un límite finito. Ahora bien $|p_m| = \exp \sum_1^m b_n$ y, puesto que $\sum_1^m b_n$ tiene un límite finito, es decir, converge. En cuanto al argumento $\sum_1^m c_n$ hay también un límite, puesto que $p \neq 0$ y, por tanto, la serie $b_n + ic_n$ converge. Recíprocamente, si la serie converge el producto converge. Se observa que la demostración supone esencialmente $p \neq 0$.

II. CONVERGENCIA ABSOLUTA

Se dice que el producto infinito *es absolutamente* (o *conmutativamente) convergente si su convergencia es independiente del orden de los factores.*

Para ello es necesario y suficiente que la serie $b_n + ic_n$ converja absolutamente. Se transforma esta condición poniendo:

$$a_n = 1 + u_n$$

y se puede entonces probar que *el producto* $\prod_{n=1}^{+\infty} (1 + u_n)$ *converge absolutamente si, y solamente si, la serie* u_n *converge absolutamente.*

III. CONVERGENCIA SOBRE R*

Si los factores del producto son todos reales, poniendo $a_n = 1 + u_n$ *se ve que la convergencia en* $\mathbf{R}^*$ *del producto equivale a la convergencia de la serie* u_n.

Basta, para hacer la prueba, con pasar a los logaritmos.

IV. DESCOMPOSICION DE SEN Z EN FACTORES

1.° Sea $\prod_{n=1}^{+\infty} [1 + u_n(m)]$ y $|u_n(m)| < v_n$, convergente, a partir de un cierto valor. Entonces:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(m) \to \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

cuando m tiende hacia infinito. Se muestra que es lo mismo para los productos y que, siempre si $|u_n(m)|\, v_n$, es convergente, el límite para m infinito del producto es el producto de los límites.

2.° Se observa que $\lim \left(1 + \frac{z}{m}\right)^m = \exp z$, lo que se prueba poniendo $z = x + iy$ y buscando el límite del módulo y el límite del argumento.

3.° De:

$$\operatorname{sen} z = \lim_{m=+\infty} \frac{1}{2i}\left[\left(1 + \frac{iz}{m}\right)^m - \left(1 - \frac{iz}{m}\right)^m\right] = \lim_{m=+\infty} P_m(z),$$

se deduce que las raíces de $P_m(z)$ son las de:

$$\left(\frac{m - iz}{m + iz}\right)^m = 1 = \exp 2in\pi.$$

Tomemos $m = 2p$, lo que es siempre posible, puesto que existe el límite para m tendiendo hacia infinito y también para p tendiendo hacia infinito.

Las raíces son 0, $\pm\, 2p \operatorname{tg} \dfrac{n\pi}{2p}$ con:

$$n = 1, 2, \ldots, p - 1.$$

El término de más bajo grado de $p_m(z)$ es z y se puede escribir la fórmula debida a Euler:

$$\operatorname{sen} z = z \lim_{p=+\infty} \prod_{n=1}^{p-1} \left(1 - \frac{z^2}{4p^2 \operatorname{tg}^2 \dfrac{n\pi}{2p}}\right).$$

Pongamos:

$$u_n(p) = \frac{1}{4p^2 \operatorname{tg}^2 \dfrac{n\pi}{2p}}.$$

La desigualdad $\dfrac{n\pi}{2p} < \operatorname{tg} \dfrac{n\pi}{2p}$ implica para todo p:

$$|\, u_n(p) \,| \leqslant \frac{1}{n^2 \pi^2}$$

de tal modo que puede aplicarse la regla de Weierstrass y, por tanto, la interversión de los límites. De donde:

$$\operatorname{sen} z = z \lim_{n=+\infty} \prod_{n=1}^{n} \lim_{p=+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{4p^2 \operatorname{tg}^2 \dfrac{n\pi}{2p}}\right) = z \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2 \pi^2}\right)$$

que descompone $\operatorname{sen} z$ para z real o complejo en producto infinito.

CAPITULO VIII

SERIES DE FOURIER

Nosotros llamamos series de Fourier a las *series trigonométricas:*

$$[38] \quad \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos \omega x + b_1 \operatorname{sen} \omega x + \ldots + a_n \cos n\omega x + b_n \operatorname{sen} n\omega x + \ldots$$

Es así que las series de términos generales:

$$a^n \cos nx \quad \text{y} \quad a^n \operatorname{sen} nx$$

son series trigonométricas absoluta y uniformemente convergentes si $|a| < 1$, y se calcula fácilmente su suma formando $a^n(\cos nx + i \operatorname{sen} nx)$, que es igual a $a^n \exp inx$, término general de una progresión geométrica.

Por lo mismo, las series $n^\alpha \cos nx$ y $n^\alpha \operatorname{sen} nx$ son series trigonométricas que convergen sobre el abierto $]0, 2\pi[$ si α es negativa, como hemos mostrado en el capítulo III utilizando la transformación de Abel.

I. COEFICIENTES DE FOURIER

Siendo dada una función $f(x)$ integrable sobre $[a, b]$, nosotros llamaremos coeficientes de Fourier de $f(x)$ sobre $[a, b]$ a las integrales.

[39]
$$\begin{cases} a_n = \dfrac{\omega}{\pi}\displaystyle\int_a^b f(x) \cos n\omega x \, dx \\ b_n = \dfrac{\omega}{\pi}\displaystyle\int_a^b f(x) \operatorname{sen} n\omega x \, dx \end{cases}$$

donde $\omega = \dfrac{2\pi}{b - a}$ es igual a 1 si $b - a = 2\pi$, lo que nosotros supondremos en adelante.

Habiendo asociado así a una función $f(x)$ una serie trigonométrica formal, es necesario esforzarse en determinar sobre qué condiciones se puede afirmar:

1.º que esta serie converge;

2.º que ella representa $f(x)$ en un intervalo de 2π, amplitud del período de la serie trigonométrica [38], donde $\omega = 1$.

Nosotros responderemos a estas cuestiones conservando en principio la noción habitual de convergencia y mostraremos seguidamente que la convergencia en media permite sumar nuevas clases de series, no siendo esta extensión de la noción de convergencia, por otra parte, la única que ha sido estudiada por los matemáticos.

II. TEOREMA DE JORDAN

Este teorema, que contiene un resultado anterior de Dirichlet, se enuncia:

Si $f(x)$, de período 2π, es una variación limitada, su serie de Fourier converge para todas las x hacia:

$$\frac{1}{2}[f(x + 0) + f(x - 0)].$$

Además, la convergencia es uniforme sobre todo segmento sobre el cual $f(x)$ es continua.

Se notará que $f(x + 0)$ representa el límite a la derecha de $f(x)$ al punto x y $f(x - 0)$ el límite a la izquierda. Si $f(x + 0) \neq f(x - 0)$, siendo finita su diferencia, se dice que $f(x)$ admite una discontinuidad de primera especie. En fin, una función de variación limitada puede ser definida como diferencia de dos funciones crecientes. Demostraremos este resultado bajo condiciones un poco más restrictivas que nosotros enunciaremos:

$f(x)$ es continua y provista de una derivada continua sobre $[a, a + 2\pi]$, salvo quizá un número finito de puntos que son discontinuidades de primera especie para $f(x)$ y para $f'(x)$.

1. Mostremos, en principio, que si $f(x)$ es superpuesta[1] sobre $[a, b]$, entonces:

[40]
$$\int_b^a f(x) \operatorname{sen} nx \, dx$$

tiende hacia cero si n tiende hacia infinito.

[1] Este es el caso cuando $f(x)$ no tiene discontinuidades de primera especie en número finito.

Una función superpuesta es, por definición, límite uniforme sobre $[a, b]$ de una serie $f_p(x)$ de funciones «en escalera». Luego, para todo $x \in [a, b]$, existe N tal que para todo $p > N$ se tiene $|f(x) - f_p(x)| < \varepsilon$.

Fijemos $p = N + 1$, y sea $]x_m, x_{m+1}[$ un intervalo sobre el cual $f_p(x) = a_m$, constante, y pongamos $A = \sup |a_m|$ sobre $[a, b]$.

Entonces:

$$I_m = \int_{x_m}^{x_{m+1}} f_{N+1}(x) \operatorname{sen} nx\, dx = a_m \left[-\frac{\cos nx}{n} \right]_{x_m}^{x_{m+1}}$$

y:

$$|I_m| \leqslant 2 \frac{|a_m|}{n} \leqslant 2 \sup \frac{|a_m|}{n} = \frac{2A}{n}.$$

Como p es fijado, existen Q «peldaños de escaleras» para definir $f_p(x)$ y:

$$\left| \int_a^b f_p(x) \operatorname{sen} nx\, dx \right| < \frac{2AQ}{n}$$

que puede ser hecho inferior a todo ε positivo por una elección conveniente de n.

Escribiendo:

$$\int_a^b f(x) \operatorname{sen} nx\, dx$$

$$= \int_a^b [f(x) - f_p(x)] \operatorname{sen} nx\, dx + \int_a^b f_p(x) \operatorname{sen} nx\, dx$$

y observando que las dos integrales del segundo miembro tienden hacia 0, la primera porque:

$$\left| \int_a^b [f(x) - f_p(x)] \operatorname{sen} nx\, dx \right| < \varepsilon \int_a^b |\operatorname{sen} nx|\, dx < \varepsilon(b - a)$$

y la segunda en virtud de la demostración precedente, la proposición queda demostrada:

2. **Integral de Dirichlet.**—Esta es la integral

$$I_n = \int_a^b f(x) \frac{\operatorname{sen} nx}{x}\, dx$$

donde se busca el límite I cuando n tiende hacia infinito.

— Si $ab > 0$, $I = 0$, según el resultado precedente.

— Si $a = 0$ y b positivo, $I = \frac{\pi}{2} f(+0)$.

Formemos en efecto:

$$J_n = \int_0^b \frac{f(x) - f(+0)}{x} \operatorname{sen} nx\, dx$$

y como la relación tiende hacia $f'(+0)$, que existe por hipótesis cuando x tiende hacia $+0$, se puede aplicar el resultado precedente y el límite J de J_n es nulo, de donde:

$$I = f(+0) \lim_{n=+\infty} \int_0^b \frac{\operatorname{sen} nx}{x}\, dx$$

Se pone $t = nx$ y

$$\int_0^{nb} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt \to \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt.$$

La última integral converge, lo que nos permite designar provisionalmente su valor por B, la igualdad $B = \frac{\pi}{2}$ queda seguidamente para probar. En efecto:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$$

y, poniendo $x = n\pi + y$, se tiene:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} y}{n\pi + y} dy$$

y la serie al segundo miembro es convergente, según el teorema de Leibniz, lo que demuestra nuestra afirmación.

— Si $a < 0$ y $b = 0$, se muestra, por lo mismo, que $I = \frac{1}{2}\pi f(-0)$.

— Si $ab < 0$, se descompone en:

$$\int_a^0 + \int_0^b$$

y se encuentra:

[41] $$I = \frac{1}{2}\pi[f(+0) + f(-0)].$$

3. **Generalización.**—Sea:

$$K_n = \int_0^{\pi} f(x) \frac{\operatorname{sen}(2n+1)x}{\operatorname{sen} x} dx,$$

donde n es entero.

Escribamos $K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$ y pongamos en la última integral $x = \pi - y$, de donde:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x) \frac{\operatorname{sen}(2n+1)x}{\operatorname{sen} x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\pi - y) \frac{\operatorname{sen}(2n+1)y}{\operatorname{sen} y} dy,$$

de donde:

$$K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + f(\pi - x)] \frac{\operatorname{sen}(2n+1)x}{x} \times \frac{x}{\operatorname{sen} x} dx$$

y como $\frac{x}{\operatorname{sen} x}$ es continua se puede aplicar el resultado del § 2 precedente, es decir, que:

$$K_n \rightarrow K = B[f(+0) + f(\pi - 0)]$$

si n tiende hacia $+\infty$.

Vamos ahora a probar que $B = \frac{1}{2}\pi$. En efecto, el valor de B no depende de $f(x)$ y se puede entonces elegir $f(x) = 1$, de tal modo que:

[42] $$\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}(2n+1)x}{\operatorname{sen} x} dx$$

tiende hacia 2B cuando $n \rightarrow +\infty$.

Ahora bien, se verifica fácilmente la igualdad:

[43] $$\frac{\operatorname{sen}(2n+1)x}{\operatorname{sen} x} = 1 + 2\cos 2x + \ldots + 2\cos 2nx$$

y si se integra el segundo miembro de 0 a π se ve que la última integral es constantemente igual a π, de donde $2B = \pi$, como ha sido enunciado.

4. **Convergencia de una serie de Fourier.**—Pongamos:

$$S_n(x) = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x + \ldots$$
$$+ a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx$$

y, reemplazando los a_n, b_n por sus expresiones de Fourier, se obtiene:

$$[44]\quad S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(u)\,du\left[\frac{1}{2} + \cos(x-u) + \dots + \cos n(x-u)\right]$$

lo que se escribe, teniendo en cuenta la identidad [43], poniendo $x - u = -2t$:

$$[45]\qquad S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x+2t)\,\frac{\text{sen}\,(2n+1)\,t}{\text{sen}\,t}\,dt$$

lo que muestra que $S_n(x) \to \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$ si las derivadas en x existen a izquierda y a derecha, puesto que el resultado precedente se aplica a la función $g(t) = f(x+2t)$ a condición de que las derivadas $g'(+0) = f'(x+0)$ y $g'(-0) = f'(x-0)$ existan y que $f(x)$ sea periódico de período de 2π. Entonces:

$$g(+0) + g(\pi - 0) = f(x+0) + f(x+2\pi-0) = f(x+0) + f(x-0).$$

5. **Aplicaciones.**—Sea la función $f(x) = \left|\frac{x}{2}\right|$ para $x \in [-\pi, +\pi]$ y de período 2π (fig. 5).

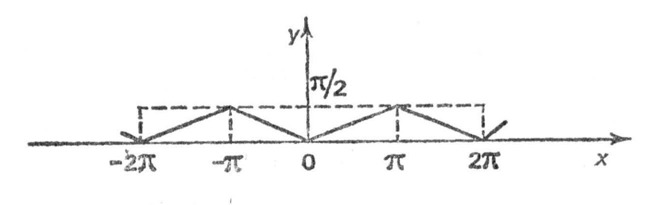


Fig. 5

Esta función verifica a todas las condiciones del teorema y, como es par, todos b_n son nulos y basta calcular:

$$2\pi a_n = 2\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx = \frac{-4}{(2p+1)^2}$$

si $n = 2p + 1$ y $a_n = 0$ si $n = 2p \neq 0$ con p entero. Además, $a_0 = \frac{\pi}{2}$, de donde:

$$\left|\frac{1}{2}x\right| = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left[\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \dots + \frac{\cos(2p+1)\,x}{(2p+1)^2} + \dots\right]$$

Para $x = \pi$, se obtiene:

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{(2p+1)^2} + \dots$$

Ahora bien:

$$(1 - 2^{-z})\,\zeta(z) = 1 + \frac{1}{3^z} + \dots + \frac{1}{(2p+1)^z} + \dots$$

Luego, si $z = 2$, se obtiene:

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right)\zeta(2) = \frac{\pi^2}{8},$$

de donde:

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \dots \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \dots = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots\right)$$

y:

$$\frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} + \dots$$

III. CONVERGENCIA EN MEDIA

La noción usual de convergencia no permite sumar series bastante simples como:

$$\frac{1}{2} + \cos x + \dots + \cos nx + \dots$$

puesto que la suma $S_n(x)$ de la serie $u_n(x) = \cos nx$ es igual a:

$$\frac{\operatorname{sen}\left(n + \frac{1}{2}\right) x}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} x}$$

que no tiene límite cuando n tiende hacia infinito.

Una generalización de la noción de convergencia permite resolver esta cuestión. Pongamos:

$$\sigma_n = \frac{S_0 + S_1 + \dots S_n}{n}.$$

Mostremos, en principio, que $\sigma_n \to S$ cuando S_n tiene un límite S. En este caso, en efecto, existe N para todo ε positivo, tal que para todo $n > N$:

$$S_n = S + \varepsilon(n) \quad \text{con} \quad |\varepsilon(n)| < \varepsilon.$$

Pongamos entonces $n = N + p$. Se obtienen:

$$\sigma_n = \frac{S_0 + S_1 + \dots + S_N}{N + p} + \frac{pS}{N + p}$$
$$+ \frac{\varepsilon(N + 1) + \dots + \varepsilon(n)}{N + p}$$

Cuando n tiende hacia infinito, p tiende hacia infinito, de tal modo que, en el segundo miembro, la primera fracción tiende hacia cero, puesto que N es fijado; la segunda hacia S, y la tercera hacia 0 por ser inferior en valor absoluto a $\frac{p}{N + p}\varepsilon$, que es inferior a ε, de donde el resultado.

Establecido esto, volvamos a tomar la serie:

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad u_n(x) = \cos nx \quad \text{para} \quad n > 0,$$

donde nosotros sabemos que $2S_n \operatorname{sen} \frac{1}{2} x = \operatorname{sen}\left(n + \frac{1}{2}\right) x.$

Calculemos:

$$2\left(\operatorname{sen} \frac{x}{2}\right) n\sigma_n = \operatorname{sen} \frac{1}{2} x + \operatorname{sen} \frac{3x}{2} + \dots + \operatorname{sen}\left(n + \frac{1}{2}\right) x.$$

Multiplicando por $2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} x$ y transformando al segundo miembro los productos en sumas, se obtiene fácilmente:

$$4n\sigma_n \left(\operatorname{sen} \frac{1}{2} x\right)^2 = 1 - \cos x + (\cos x - \cos 2x) + \dots$$
$$+ \left(\cos nx - \cos \frac{1}{2}(n + 1) x\right) = 1 - \cos (n + 1) x$$

de donde:

$$\sigma_n = \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}(n+1)\,x}{2n\left(\operatorname{sen}\frac{1}{2}x\right)^2}$$

y σ_n tiende hacia 0 si $x \neq 2k\pi$.

Se dirá que una serie *converge en media* (en el sentido de Césaro) si, y solamente si, σ_n tienen un límite cuando n tiende hacia infinito. Así, la serie cos nx, que diverge en el sentido ordinario converge en media como resulta del estudio precedente, y se escribirá:

$$\sum_{1}^{+\infty} \cos nx \underset{e}{=} -\frac{1}{2} \quad \text{(en media).}$$

IV. TEOREMA DE FEJER

Nosotros buscamos ahora en qué condiciones una serie de Fourier representa en media una función $f(x)$ asociada. Es necesario formar σ_n con, como ya se ha visto:

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x+u)\,\frac{\operatorname{sen}\,(n+\frac{1}{2})\,u}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}u}\,du.$$

Resulta del cálculo precedente que:

[46] $$\sigma_n = \frac{1}{2n\pi}\int_0^{2\pi} f(x+u)\,\frac{\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}(n+1)\,u}{(\operatorname{sen}\frac{1}{2}u)^2}\,du.$$

Si $f(x) = 1$, se tiene $a_0 = 2$ y $a_n = b_n = 0$ si n es positivo, luego $S_n = 1$ para todo n, lo que implica $\sigma_n = 1$, de donde:

[47] $$1 = \frac{1}{2n\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}(n+1)\,u}{\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}u}\,du.$$

Multipliquemos por $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$ y suprimamos miembro a miembro [47] de [46], se obtiene:

$$\sigma_n - \tfrac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$$
$$= \frac{1}{2n\pi}\int_0^{2\pi}\left\{f(x+u) - \tfrac{1}{2}[f(x+0) + f(x+0)]\right\}\frac{\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}(n+1)\,u}{(\operatorname{sen}\frac{1}{2}\,u)^2}\,du.$$

Bajo condiciones convenientes que nosotros enunciaremos en el teorema de Fejér se puede mostrar que la última integral tiende hacia cero:

Si $f(x)$, de período 2π, limitada e integrable, no tiene más que discontinuidades de primera especie, la serie de Fourier asociada converge en media hacia:

$$\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)].$$

Además, la convergencia es uniforme sobre el segmento $[a, b]$ sobre el cual $f(x)$ es continua.

Estos resultados son conocidos generalmente bajo el nombre de *teorema de Fejér*.

CAPITULO IX

SERIES DE FUNCIONES ORTOGONALES

Las series de Fourier no son más que casos particulares de las series de funciones ortogonales, esenciales en mecánica ondulatoria teórica. Las funciones de onda, en efecto, son funciones de cuadrado sumable en un espacio de Hilbert, y funciones de onda propias correspondiendo a valores propios distintos son ortogonales, conforme a una propiedad de las matrices hermitianas. En fin, un sistema de funciones ortogonales es llamado completo si puede darnos el desarrollo en serie de una función de onda cualquiera, solución del problema propuesto.

I. FUNCIONES ORTONORMADAS

Una sucesión de funciones $f_n(x)$ es ortonormada sobre $[a, b]$ si, y solamente si:

$$\int_a^b f_n(x)\,\overline{f_m(x)}\,dx = d_{m,\,n}$$

donde $d_{n,\,m} = 0$ si $m \neq n$ y $d_{n,\,m} = 1$ si $n = m$, siendo designada la función conjugada de $f_m(x)$ por $\overline{f_m(x)}$ si f_m es complejo, es decir, si:

$$f_m(x) = g_m(x) + ih_m(x),$$

siendo g_m y h_m funciones de **R** en **R**.

Se puede generalizar fácilmente estas definiciones, en el caso de las funciones complejas de p variables reales en un dominio conveniente, que puede, por otra parte, ser infinito, las integrales se transforman en integrales generalizadas.

La sucesión $\dfrac{\exp inx}{\sqrt{2\pi}} = f(x)$ da un ejemplo de sucesión ortonormada sobre $[0, 2\pi]$, pues:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\exp inx)(\exp - imx)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp i(n - m)\,x\,dx = d_{m,\,n}.$$

II. FUNCIONES DEL ESPACIO L^2

Son éstas las funciones cuyo cuadrado del módulo es integrable en un dominio del espacio $\mathbf{R}^p$ de las variables. Supondremos esencialmente que éstas son funciones de **R** en **C**.

1. **Desigualdad de Schwartz.**—Nosotros consideramos en principio dos funciones reales, aplicaciones de **R** en **R**, de cuadrado integrable en el sentido de Lebesgue sobre $[a, b]$. Resulta que f es integrable si f^2 lo es. Entonces se tiene, siendo λ real:

$$\int_a^b (g + \lambda h)^2\,dx \geqslant 0,$$

pues la integral de una función positiva o nula sobre $[a, b]$ es positiva o nula. Desarrollando, se escribe:

$$\lambda^2\int_a^b h^2\,dx + 2\lambda\int_a^b gh\,dx + \int_a^b g^2\,dx \geqslant 0.$$

El trinomio en λ será positivo o nulo si, y solamente si, su discriminante es negativo, de donde la desigualdad llamada de Schwartz:

$$\left|\int_a^b gh\,dx\right| \leqslant \left(\int_a^b h^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b g^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

2. **Espacio vectorial L^2.**—Consideramos el conjunto L^2 de las funciones complejas de **R** en **C** cuyo cuadrado del módulo es integrable, en el sentido de Lebesgue, sobre $[a, b]$. Si f y $\varphi \in L^2$, podemos aplicar a $|f|$ y $|\varphi|$ la desigualdad de Schwartz demostrada para las funciones reales:

$$\int_a^b |f\bar{\varphi}|\,dx \leqslant \left(\int_a^b |f|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b |\bar{\varphi}|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

Se observa en seguida que:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx$$

lo que se puede justificar notando que, si las integrales no son integrales generalizadas, son límites de sumas, si bien que la desigualdad precedente resulta de la desigualdad sobre el módulo de una suma de números complejos y que, si las integrales son integrales generalizadas, la desigualdad resulta de un paso al límite a partir de integrales no generalizadas.

Luego se obtiene la desigualdad de Schwartz para las funciones complejas:

$$\left|\int_a^b f\bar{\varphi}\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f\bar{\varphi}|\,dx \leqslant \left(\int_a^b |f|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |\varphi|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Resulta que $f\bar{\varphi}$ y $\bar{f}\varphi$ son integrables sobre $[a, b]$ y, por tanto, que $f + \varphi$ es de cuadrado integrable, lo que se escribe $f + \varphi \in L^2$. Como, por otra parte, $\lambda f \in L^2$ para todo $\lambda \in \mathbf{C}$, resulta, según el teorema del subespacio, que L^2 es un espacio vectorial sobre $\mathbf{C}$.

Nosotros podemos *normar* poniendo:

$$\|f\| = \left(\int_a^b |f|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Se verifican los axiomas de definición de las normas, en particular:

$$\|f + \varphi\| \leqslant \|f\| + \|\varphi\|$$

con ayuda de la desigualdad de Schwartz. A esta norma se asocia un *producto escalar hermitiano:*

$$\langle f \mid \varphi \rangle = \int_a^b f\bar{\varphi}\,dx.$$

Se observa la hermiticidad:

$$\langle f \mid \varphi \rangle = \overline{\langle \varphi \mid f \rangle} = \text{conjugado de } \int_a^b \bar{f}\varphi\,dx.$$

Este espacio vectorial no es completo, según el teorema de Fischer-Riesz, más que si las integraciones son hechas en el sentido de Lebesgue y no en el caso más restrictivo de Riemann.

III. DESIGUALDAD DE BESSEL

Sean $g_1, g_2, \ldots, g_n$ funciones ortonormadas de L^2 y $f(x)$ una función de L^2 definida sobre $[a, b]$. Nosotros llamamos coeficientes de Fourier de $f(x)$ relativamente al sistema g_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ a las integrales:

[48] $$a_i = \int_a^b f\bar{g}_i\,dx.$$

Considerando esto, nosotros buscamos λ_i complejos tales que:

$$\left\| f(x) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i \right\|$$

sea minorante, lo que vuelve a «minimizar» la integral:

$$\mathrm{I} = \int_a^b \left| f(x) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i \right|^2 dx.$$

Desarrollemos:

$$\mathrm{I} = \int_a^b |f^2(x)|\,dx - \sum_1^n \bar{\lambda}_i \int_a^b f\bar{g}_i\,dx$$

$$- \sum_1^n \lambda_i \int_a^b \bar{f} g_i\,dx + \sum \lambda_i \bar{\lambda}_j \int_a^b g_i \bar{g}_j\,dx.$$

La última suma se reduce a $\Sigma\,|\lambda_i|^2$, puesto que los g_i forman un sistema ortonormado. Introduzcamos los coeficientes de Fourier:

$$\mathrm{I} = \int_a^b |f^2(x)|\,dx - \sum_1^n \bar{\lambda}_i a_i - \sum_1^n \lambda_i \bar{a}_i + \sum |\lambda_i|^2$$

de donde:

$$I = \| f \|^2 - \sum_i | a_i |^2 + \sum_i (a_i - \lambda_i)(\overline{a_i} - \overline{\lambda_i}).$$

La última es positiva, puesto que es igual a $\sum | a_i - \lambda_i |^2$, o nula, si $a_i = \lambda_i$, para $i = 1, 2, \ldots, n$. Entonces la integral I es minorante, y está así probado que la función:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i g_i$$

donde los a_i son los coeficientes de Fourier, realiza la mejor aproximación en media cuadrática de $f(x)$ cuando se utiliza la serie g_i de funciones ortonormadas. En este caso, de:

$$I = \| f \|^2 - \sum_i | a_i |^2 \geqslant 0$$

se deduce la desigualdad de Bessel:

$$\sum_i | a_i |^2 \leqslant \| f \|^2 = \int_a^b | f^2 | \, dx,$$

desigualdad en sentido amplio (pudiendo incluir la igualdad) entre la suma de los cuadrados de los módulos de los coeficientes de Fourier de una función de cuadrado integral y el cuadrado de la norma de esta función.

IV. IGUALDAD DE PARSEVAL

Supongamos que el sistema de los g_i sea infinito. La serie de término general $| a_n |^2$ es convergente, puesto que las sumas parciales, según la desigualdad de Bessel, son mayoradas y, en consecuencia:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} | a_n |^2 \leqslant \| f \|^2.$$

Se dice que el sistema de los g_i es *total* (los físicos dicen completo) si la desigualdad precedente se transforma en una igualdad, llamada de Parseval:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} | a_n |^2 = \| f \|^2 = \int_a^b | f |^2 \, dx.$$

Es necesario y suficiente para que el sistema sea total que la integral I, definida precedentemente, tienda hacia cero cuando n tiende hacia infinito. Se dice de nuevo que la serie converge en media cuadrática hacia $f(x)$.

La proposición siguiente es de fácil demostración.

Si la sucesión $S_n(x) = \sum_1^n a_i g_i$ *converge uniformemente sobre* $[a, b]$ *hacia* $f(x)$, *converge en media cuadrática.*

En efecto, $\sup | S_n(x) - f(x) | < \varepsilon$ para todo $x \in [a, b]$ y para $n > N$ implica:

$$I = \int_a^b | S_n(x) - f(x) |^2 \, dx \leqslant \varepsilon^2 (b - a),$$

lo que demuestra la proposición, pero la recíproca será inexacta.

V. APLICACION A LAS SERIES DE FOURIER

La sucesión $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}, \ldots, \dfrac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \dfrac{\text{sen}\, nx}{\sqrt{\pi}}, \ldots$ es ortonormada sobre un intervalo de amplitud 2π. Además, se demuestra que esta sucesión es total.

Ahora bien, si $f(x)$ es de variación limitada sobre $[a, b]$

con $b - a = 2\pi$, su serie de Fourier, asociada según el teorema de Jordan, posee las siguientes propiedades:

1.° Converge hacia $f(x)$ en todo punto donde $f(x)$ es continua.

2.° Esta convergencia es uniforme sobre todo intervalo de continuidad y se le puede aplicar la fórmula de Parseval si es continua sobre un intervalo de amplitud 2π. Se obtiene entonces:

$$\frac{1}{2}|a_0|^2 + \ldots + |a_n|^2 + |b_n|^2 + \ldots = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} |f(x)^2 dx.$$

Sea, por ejemplo, la función $\frac{1}{2}|x|$, que es continua. Se obtiene según fáciles cálculos, recordando que su desarrollo de Fourier ha sido ya escrito sobre $[-\pi, \pi]$:

$$\frac{\pi^4}{96} = 1 + \frac{1}{3^4} + \ldots + \frac{1}{(2p+1)^4} + \ldots$$

y, por transformaciones simples:

$$\frac{\pi^4}{90} = 1 + \frac{1}{2^4} + \ldots + \frac{1}{n^4} + \ldots = \zeta(4).$$

VI. INTERPRETACION FISICA

La interpretación física en mecánica ondulatoria está condicionada por dos principios generales:

1.° Los valores posibles de una magnitud ligada a un corpúsculo, electrón o fotón, por ejemplo, son los valores propios de la matriz hermitiana o, más generalmente, del operador lineal y hermitiano correspondiente a esta magnitud.

2.° Las funciones propias de este operador A forman un sistema ortogonal $\{g_i\}$. La función de onda f del corpúsculo es una combinación lineal de estas funciones de onda propia $f = \sum_1^n c_i g_i$ (aquí $i = 1, 2, \ldots, n$) donde los c_i son complejos. Entonces $|c_i|^2$ representa la probabilidad para que el corpúsculo se encuentre en el estado g_i correspondiente, es decir, la probabilidad para que una medida nos dé el valor propio correspondiente.

Todas las funciones de onda están normadas a la unidad, es decir, que en el dominio D:

$$\int_D |f^2(x)| \, dx = 1.$$

En consecuencia, la igualdad de Parseval nos da aquí la relación:

$$1 = \sum_1^n |c_i|^2$$

que significa simplemente que la probabilidad total de todos los casos es igual a la unidad, es decir, que todas las situaciones posibles del corpúsculo han sido bien descritas, entendiéndose que no puede aparecer sino una sola de estas situaciones, integralmente. Esto provoca, por otra parte, en teoría de Dirac, una importante dificultad, pues el sistema ortogonal de las ondas planas sólo es *total* cuando no se olvidan las ondas de *energía negativa*.

CAPITULO X

EXTENSIONES DIVERSAS

I. SERIES DE UN GRUPO TOPOLOGICO

La noción de serie o de familia sumable no necesita para poder ser examinada más que la noción de *grupo topológico, conmutativo y separado* denotado aditivamente. La existencia de un tal grupo, que puede incluso no ser conmutativo si no se considera más que las series y no las familias sumables, basta, en efecto, si se supone dada una sucesión:

$$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$$

de sus elementos para formar las sumas parciales:

$$S_n = \sum_{1}^{n} u_i$$

que son elementos del grupo. Como este grupo es topológico, la noción de «vecindad», por tanto, de límite, ha sido definida ahí, y como es separada este límite es único; de ahí la posibilidad de definir la convergencia y la divergencia de la serie.

La condición de Cauchy será siempre una condición necesaria de convergencia. Ella se escribirá aquí:

$$S_m - S_n \in V(O)$$

si V(O) es una «vecindad» cualquiera del origen para todos $m > n$, siendo ambos superiores a un entero N conveniente.

En los espacios normados, es más cómodo reemplazar esta condición por $\| S_m - S_n \| < \varepsilon$, para todo ε positivo. Una definición análoga valdrá para las familias sumables.

II. SERIES DE MATRICES

Los espacios normados son especialmente interesantes. Y son completos si, y solamente si, la condición necesaria de Cauchy es allí suficiente. Damos un ejemplo de un espacio vectorial normado completo considerando las matrices cuadradas $M(p \times p)$ sobre $\mathbb{R}$ o sobre $\mathbb{C}$. Su conjunto constituye un espacio vectorial de p^2 dimensiones como resulta de:

$$M = \sum_{i,j} a_i^j m_i^j$$

donde m_i^j representa la matriz, todos cuyos elementos son nulos salvo aquél de la i-ésima línea y de la j-ésima columna, que es igual a 1. Como $M = 0$ implica $a_i^j = 0$ para todos $i, j = 1, 2, \ldots, p$, estas matrices m_i^j forman una base de este espacio vectorial.

Introduzcamos una norma poniendo:

$$\| M \| = \sup | a_i^j | = m, \text{ sobre el conjunto de los } i, j.$$

Se verifica fácilmente que esta definición satisface a todas las condiciones de una norma.

Calculemos M^2 donde cada término es una suma de p términos lo más iguales en valor absoluto a m^2.

Luego:

$$\| M^2 \| = pm^2.$$

Admitamos:

$$\| M^n \| = p^{n-1} m^n.$$

Obtenemos:

$$\| M^{n+1} \| = p^n m^{n+1}$$

puesto que cada término M^{n+1} es una suma de p términos lo más iguales a $m^n \times m = m^{n+1}$.

Definamos ahora exp M para la serie:

$$[49] \qquad \exp M = 1 + M + \frac{M^2}{2!} + \ldots + \frac{M^n}{n!} + \ldots$$

El segundo miembro es una matriz $p \times p$ donde cada término está definido para una serie de término general mayorado en módulo por $\| M^n \| = p^{n-1} m^n$. Ahora bien, la serie:

$$u_n = \frac{p^{n-1} m^n}{n!}$$

converge, puesto que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{pm}{n+1}$, que tiende hacia 0 si $n \to \infty$. Luego [49] define exp M y, a partir de [49], se definen sh M, ch M, th M, cos M, sen M, tg M. Se notará siempre que las fórmulas de adición de estas líneas no existen más que si:

$$[50] \qquad (\exp M)(\exp M') = \exp (M + M')$$

lo que exige que las *matrices* M y M′ *conmuten*, pues el segundo miembro de [50] es el producto de dos series y la igualdad no es válida más que si se puede aplicar la fórmula del binomio en los anillos conmutativos.

III. ALGEBRA DE CLIFFORD

Sobre un espacio E_n de n dimensiones sobre **R**, al cual está asociada una forma cuadrática, queremos definir una multiplicación. Si $a, b, c\ldots$ son elementos de E_n, nosotros representamos la multiplicación por simple yuxtaposición y los productos por letras mayúsculas A, B, C... Diremos que la estructura de esta álgebra es de Clifford si existe para los productos A, B, C... un grupo aditivo abeliano. Además:

$$(AB)\,C = A\,(BC) \quad \text{(asociatividad)}$$
$$aO \qquad Oa$$

(O es el vector nulo y a un vector cualquiera)

$$\left.\begin{array}{l}(A + B)\,C = AC + BC\\ C\,(A + B) = CA + CB\end{array}\right. \quad \text{(distributividad).}$$

Nosotros suponemos que las escalares conmutan con los vectores:

$$a\alpha = \alpha a \quad (\alpha, \text{ escalar})$$

En fin, ab es escalar si, y solamente si, a y b son colineales y $(|a^2|)^{\frac{1}{2}}$ es la longitud del vector.

La álgebra así definida es la álgebra de Clifford C_n asociada a E_n, y sus elementos son llamados números de Clifford o *c*-números.

IV. ALGEBRA DEL ESPACIO DE PAULI

Nosotros queremos esencialmente desarrollar esta álgebra en el espacio de tres dimensiones de la geometría ordinaria, donde, por consecuencia, la longitud de un vector tiene todas las propiedades de una norma.

Descomponemos el producto ab de dos vectores en una parte simétrica llamada *producto interno* y una parte antisimétrica llamada *producto externo* poniendo:

[51] $$ab = a\,.\,b + a \wedge b$$

con: $$a\,.\,b = b\,.\,a \qquad \text{(simetría)}$$

$$a \wedge b = -\,b \wedge a \quad \text{(antisimetría).}$$

De [51] y de $ba = a \cdot b - a \wedge b$, se deduce:

$$a\,.\,b = \frac{1}{2}\,(ab + ba)$$

$$a \wedge b = \frac{1}{2}\,(ab - ba).$$

Aquí, el producto interno $a\,.\,b$ no es otro que el producto escalar usual. En cuanto al producto externo está simplemente ligado, como se verá, al producto vectorial habitual de a y b (o producto en cruz) que será denotado aquí:

$$a \times b.$$

Dos vectores a y b conmutan si, y solamente si, $a \wedge b = 0$ y entonces ab es escalar, luego a y b son colineales.

Dos vectores a y b anticonmutan si, y solamente si, $ab = -ba$, luego si a y b son ortogonales. En este caso, $ab = a \wedge b$.

V. MATRICES DE PAULI

Nosotros abandonamos ahora este modo axiomático de exposición para utilizar las matrices de Pauli, que denotamos:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

donde $i^2 = -1$.

Se verifica fácilmente si $d_{i,j} = 0$ para $i \neq j$ y $d_{i,j} = 1$ si $i = j$:

$$\sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2d_{i,j} \quad \text{con} \quad i, j = 1, 2, 3,$$

de tal suerte que se puede considerar los σ_i como tres vectores de una base ortonormada, siendo designada la matriz unidad 2×2 por 1. Se verifica fácilmente que, si se llama C_3 al espacio vectorial de dimensión 8 de las matrices complejas 2×2 sobre $\mathbb{R}$, el conjunto de las matrices:

$$1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_1 \sigma_2, \sigma_2 \sigma_3, \sigma_3 \sigma_1, \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$$

forma una base de C_3. Como:

$$(\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3)^2 = -1$$

se pondrá en adelante $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = i$. Se sigue que un elemento cualquiera de C_3 se escribe bajo la forma general, asociada a una matriz 2×2 cualquiera:

$$A = A_s + A_v + A_b + A_p$$

donde A_s es un escalar real, A_v un vector, A_b un bivector, o sea, que:

$$A_b = b_1 \sigma_2 \sigma_3 + b_2 \sigma_3 \sigma_1 + b_3 \sigma_1 \sigma_2 = i(b_1 \sigma_1 + b_2 \sigma_2 + b_3 \sigma_3),$$

es decir, un vector multiplicado por i y llamado *dual* del vector.

En fin, A_p, que es un escalar real, multiplicado por i es llamado *pseudoescalar*.

Nosotros introducimos dos operaciones fundamentales:

1.° *Cambio del sentido de todos los vectores*, que transforma A en:

$$\overline{A} = A_s - A_v + A_b - A_p.$$

Si $A = \overline{A}$, A es llamado par, e impar si $\overline{A} = -A$.

2.° $\widetilde{A}$, obtenido a partir de A, invirtiendo el orden de los factores:

$$\widetilde{A} = A_s + A_v - A_b - A_p.$$

En fin, desarrollando el producto ab y formando $a \wedge b$, se verifica:

[52] $$a \times b = -i\,(a \wedge b)$$

que liga el bivector y el producto vectorial ordinario. El bivector no cambia cuando se cambia el sentido de la base, es decir, cuando se cambia i en $-i$. Por el contrario, el producto vectorial ordinario cambia de sentido; no es un verdadero vector, sino un dual de bivector.

VI. CUATERNIONES

Cuando $A = \overline{A} = A_s + A_b$, nosotros diremos que A es un cuaternión. Entonces:

$$A = \alpha + i\sigma$$

donde σ es un vector de espacio. Calculemos $\exp i\sigma$.

Ponemos:

$$\sigma = |\sigma|\hat{\sigma}.$$

$\hat{\sigma}$ se lee σ cubierta, y representa el vector unitario del mismo sentido que σ, puesto que $|\sigma|$ es la longitud de σ.

Desarrollemos en serie $\exp i\sigma$ escribiendo:

$$\exp i\sigma = 1 + i\sigma + \frac{(i\sigma)^2}{2} + \ldots + \frac{i^n \sigma^n}{n!} + \ldots$$

Separando la parte escalar y la parte bivectorial al segundo miembro, se escribe:

$$\exp i\sigma = 1 - \frac{\sigma^2}{2!} + \frac{\sigma^4}{4!} + \ldots + i\hat{\sigma}\left(|\sigma| - \frac{|\sigma|^3}{3!} + \ldots\right),$$

es decir:

[53] $$\exp i\sigma = \cos|\sigma| + i\hat{\sigma}\operatorname{sen}|\sigma|,$$

de donde resulta que $\exp i\sigma$ es un cuaternión.

Decimos que un tal exponencial de bivector está asociado simplemente a la rotación de eje $\hat{\sigma}$ y de ángulo $2|\sigma|$. Pongamos, en efecto:

[54] $$x' = (\exp - i\sigma)\, x (\exp i\sigma)$$

donde x' representa el vector transformado del vector x cualquiera.

Descompongamos x poniendo:

$$x = u + v \quad \text{con} \quad u \wedge \sigma = 0 \quad \text{y} \quad v \cdot \sigma = 0$$

$$x' = u' + v' \quad \text{con} \quad u' \wedge \sigma = 0 \quad \text{y} \quad v' \cdot \sigma = 0.$$

Como u conmuta con σ y, como todo vector, con i, se obtiene:

$$u' = u.$$

Como v anticonmuta con σ, se obtiene:

$$v' = (\exp - 2i\sigma)\, v.$$

Desarrollemos, lo que permite escribir:

$$v' = (\cos 2|\sigma| - i\hat{\sigma}\operatorname{sen} 2|\sigma|)\, v,$$

pero $\hat{\sigma}v = \hat{\sigma} \wedge v$ y, según [52], $i\hat{\sigma}v = -(\hat{\sigma} \times v)$, de donde:

$$v' = v\cos 2|\sigma| + (\hat{\sigma} \times v)\operatorname{sen} 2|\sigma|$$

que expresa que v ha vuelto de $2|\sigma|$ alrededor de $\hat{\sigma}$.

VII. PRODUCTO DE DOS ROTACIONES

El producto de una rotación $\frac{1}{2}a$ seguido de una rotación $\frac{1}{2}b$, de ejes $\hat{a}$ y $\hat{b}$ y de ángulos $|a|$ y $|b|$, se reduce a un producto de exponenciales:

$$\left(\exp \frac{1}{2} ib\right)\left(\exp \frac{1}{2} ia\right).$$

Las rotaciones no conmutan más que si lo hacen los exponenciales, es decir, si a y b conmutan y, por tanto, son colineales.

Desarrollemos el producto precedente para obtener los elementos de la rotación producto de eje $\hat{c}$ y de ángulo $|c|$. Se obtiene:

$$\exp\left(\frac{1}{2}ic\right) = \left(\cos\frac{1}{2}|b| + i\hat{b}\,\text{sen}\,\frac{1}{2}|b|\right)\left(\cos\frac{1}{2}|a| + i\hat{a}\,\text{sen}\,\frac{1}{2}|a|\right)$$

$$= \cos\frac{1}{2}|b|\cos\frac{1}{2}|a| - \hat{b}\hat{a}\,\text{sen}\,\frac{1}{2}|b|\,\text{sen}\,\frac{1}{2}|a|$$

$$+ i\hat{b}\,\text{sen}\,\frac{1}{2}|b|\cos\frac{1}{2}|a| + i\hat{a}\cos\frac{1}{2}|b|\,\text{sen}\,\frac{1}{2}|a|.$$

Ahora bien:

$$\hat{b}\hat{a} = \hat{b}\,.\,\hat{a} + \hat{b}\wedge\hat{a},$$

de donde:

$$\cos\frac{1}{2}|c| = \cos\frac{1}{2}|b|\cos\frac{1}{2}|a| - (\hat{a}\,.\,\hat{b})\,\text{sen}\,\frac{1}{2}|b|\,\text{sen}\,\frac{1}{2}|a|$$

$$\hat{c}\,\text{sen}\,\frac{1}{2}|c| = \hat{b}\,\text{sen}\,\frac{1}{2}|b|\cos\frac{1}{2}|a|$$

$$+ \hat{a}\cos\frac{1}{2}|b|\,\text{sen}\,\frac{1}{2}|a| + (\hat{a}\times\hat{b})\,\text{sen}\,\frac{1}{2}|a|\,\text{sen}\,\frac{1}{2}|b|.$$

Las polémicas, que fueron algunas veces muy vivas, sobre los cuaterniones, no tienen hoy razón de ser, puesto que

las reglas de cálculo vectorial están unificadas en la estructura de Clifford cualquiera que sea la dimensión del espacio; pero es en el estudio de la relatividad restringida donde este cálculo toma todo su interés. En efecto, permite escribir de modo muy elegante las ecuaciones generales del electromagnetismo, es decir, las ecuaciones de Lorentz para un electrón en movimiento en un campo. Permite fácilmente la descomposición de una rotación de Lorentz en una rotación espacial y una rotación temporal y, recientemente, ha sido reconocido que la ecuación de Dirac para el electrón podría escribirse bajo una forma geométrica muy sugestiva, poniendo en evidencia los tamaños físicos de campo. En esta álgebra de espacio-tiempo o álgebra de Dirac, de la cual la de Pauli es una subálgebra, una rotación cualquiera alrededor del origen está siempre asociada a un exponencial de bivector, que está necesariamente definido por un desarrollo en serie.

BIBLIOGRAFIA

C. PISOT y M. ZAMANSKY: *Mathématiques générales.* Dunod. París.

G. VALIRON: *Théorie des fonctions.* Masson. París.

J. BASS: *Cours de mathématiques,* tomos I y II. Masson. París.

N. E. NÖRLUND: *Leçon sur les series d'interpolation.* Gauthier-Villars. París.

G. CHOQUET: *Cours d'analyse.* Masson. París.